

CHAPITRE 9

STATISTIQUES

1 Vocabulaire¹

Définition 1

Dans une étude statistique on s'intéresse à des **individus** constituant une **population**.

L'aspect des individus sur lequel porte l'étude statistique s'appelle le **caractère**.

Un caractère dont les valeurs sont des nombres est **quantitatif**.

Dans le cas contraire, il est **qualitatif**.

Exemple

Une enquête a été menée auprès des élèves de la classe de 4^eH. Voici les questions posées :

1. Ce chapitre inclut des rappels de cinquième, en particulier les calculs d'effectifs, de fréquences et de moyennes, ainsi que des représentations de données statistiques sous forme de tableaux, de diagrammes ou de graphiques et leur interprétation.

- Comment viens-tu au collège : en bus (B), à pied (P), en voiture (V) ou autrement (A) ?
- Quelle est la durée de ton trajet maison-collège en minutes ?
- Combien as-tu de frères et sœurs ?

Voici les réponses des 25 élèves, réparties en deux tableaux de 15 et 10 colonnes ; chaque colonne résume les réponses d'un élève aux 3 questions.

Nombre de frère et sœurs	2	1	0	2	3
Moyen de transport	B	P	B	B	V
Durée d'un trajet (mn)	25	5	17	10	1

Nombre de frère et sœurs	1	2	2	1	0
Moyen de transport	B	V	B	V	P
Durée d'un trajet (mn)	20	15	5	14	23

Nombre de frère et sœurs	2	4	2	2	3
Moyen de transport	B	B	B	A	V
Durée d'un trajet (mn)	1	13	5	5	9

Nombre de frère et sœurs	2	3	1	3	2
Moyen de transport	B	V	P	B	B
Durée d'un trajet (mn)	35	20	11	17	28

Nombre de frère et sœurs	1	1	0	2	1
Moyen de transport	V	B	V	V	B
Durée d'un trajet (mn)	30	10	21	18	15

Réponses aux questionnaire

Tout au long de ce chapitre, nous allons effectuer une étude statistique sur les réponses des élèves à ce questionnaire. Dans un premier temps, nous allons déterminer ce que représente un individu, la population, la nature et le type du caractère étudié dans chacun des cas suivants :

- a. la taille en cm des élèves de 4e H ;
- b. l'âge des chats d'un refuge pour animaux ;
- c. le moyen de transport emprunté par chaque élève du collège pour s'y rendre le matin ;
- d. la couleur des voitures sur le parking du collège ;
- e. le nombre d'habitants dans les appartements d'un immeuble.

Réponse

	Individu	Population	caractère	Type
a	un élève	les élèves d'une classe de 4e H	la taille en cm	quantitatif
b	un chat	l'ensemble des chats du refuge	l'âge	quantitatif
c	un élève	les élèves du collège	le moyen de transport	qualitatif
d	une voiture	les voitures sur le parking	la couleur	qualitatif
e	un appartement	les appartements d'un immeuble	le nombre d'habitants	quantitatif

2 Représenter les données statistiques par un graphique

2.1 Trier et présenter les données dans un tableau

Définition 2 (effectif total, effectif d'une valeur)

Dans une série de données :

- l'**effectif total** est le nombre d'individus à étudier ;
- l'**effectif d'une valeur** est le nombre de fois ou une valeur apparaît.

Exemple

Reprenons notre enquête sur les élève de 4e H, afin d'étudier la série de données relatives au nombre N de frères et sœurs d'un élève.

À partir des réponses aux questionnaires, constituons un tableau indiquant pour chaque élève le nombre de frères et sœurs ; les élèves apparaissent dans ce nouveau tableau dans l'ordre des réponses aux questionnaires.

N	2	1	0	2	3	1	2	2	1	0	2	4	2
N	2	3	2	3	1	3	2	1	1	0	2	1	

Ce tableau est peu lisible. On peut améliorer la lisibilité en triant les données par ordre croissant du nombre de frères et sœurs.

N	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
N	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	

C'est mieux ! Nous comptons maintenant plus facilement, par exemple, que la valeur "2" est présente 10 fois : on dit que l'effectif de la valeur 2 est 10.

Ici, cela signifie que 10 élèves ont exactement 2 frères et sœurs.

Nous pouvons enfin réduire le nombre de colonne de notre tableau en indiquant, pour chaque valeur, son effectif.

Voici le tableau des effectifs.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	Total
Effectif	3	7	10	4	1	25

2.2 Représenter une série statistique à l'aide d'un diagramme en bâton

Exemple

Réaliser un diagramme en bâtons à partir du tableau suivant.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	3	7	10	4	1

Réponse

Dans ce **diagramme en bâtons** (rappels) :

- les valeurs du caractère sont placées sur l'axe horizontal ;
- les effectifs sont placés sur l'axe vertical ;
- la hauteur d'un bâton est proportionnelle à l'effectif de la valeur.

9 Statistiques

Effectifs

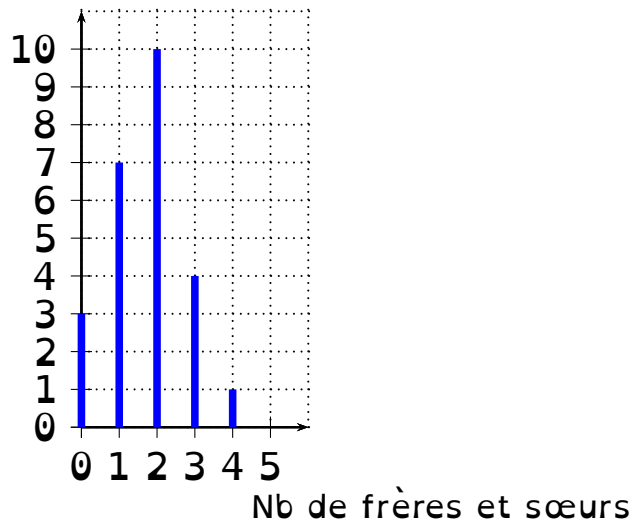


Diagramme des moyens de transport

2.3 Représenter une série statistique à l'aide d'un diagramme circulaire

Notion de fréquence

Définition 3 (fréquence)

La **fréquence** d'une valeur statistique est égale au quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$$

Propriété 1 (fréquence entre 0 et 1)

La fréquence f d'une valeur est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple

1. On s'intéresse aux élèves de la classe de 4e H qui prennent le bus pour se rendre au collège ; calculer la fréquence correspondante.
2. On lance 10 fois une pièce de monnaie qui tombe 7 fois sur pile. Réaliser un tableau des effectifs et calculer la fréquence correspondant à pile et celle correspondant à face.

Réponse

1. 13 des 23 élèves de la classe de 4e H prennent le bus pour venir au collège : la fréquence de la valeur "en bus" est $\frac{13}{23} \approx 0,57$.
2. Constituons le tableau des effectifs.

Côté de la pièce	Face	Pile	Total
Effectifs	6	4	10

La fréquence de la valeur "face" est $f_{\text{face}} = \frac{6}{10} = 0,6$.

La fréquence de la valeur "pile" est $f_{\text{pile}} = \frac{4}{10} = 0,4$.

Propriété 2 (somme des fréquences)

Dans une série statistique, la somme des fréquences de toutes les valeurs est égale à 1.

Exemple

On s'intéresse au moyen de transport utilisé par les élèves

pour venir au collège : en bus (B), à pied (P), en voiture (V) ou autrement (A).

On dispose d'un tableau des fréquences incomplet : il manque la fréquence de la valeur « en voiture ».

Moyen de transport	Bus	À pied	En voiture	Autrement	Total
Fréquence	0,52	0,12	...	0,04	...

1. Calculer la fréquence f_v de la valeur « en voiture ».
2. Compléter le tableau.
3. En déduire le nombre n_v d'élèves venant en voiture au collège.

Réponse

1. La somme des fréquences est égale à 1. On a donc :

$$0,52 + 0,12 + f_v + 0,04 = 1$$

Résolvons cette équation d'inconnue f_v :

$$f_v + 0,68 = 1$$

$$f_v + 0,68 - 0,68 = 1 - 0,68$$

$$f_v = 0,32.$$

La solution de l'équation est 0,32 et la fréquence de la valeur « en voiture » est 0,32.

2. Voici le tableau des fréquences complété.

Moyen de transport	Bus	À pied	En voiture	Autrement	Total
Fréquence	0,52	0,12	0,32	0,04	1

3. L'effectif total N est 25 .

$$n_v = N \times f_v = 25 \times 0,32 = 8$$

Donc, 8 élèves viennent en voiture au collège.

Réalisation d'un diagramme circulaire

Exemple

Intéressons-nous de nouveau au moyen de transport utilisé par les élèves de la classe de 4^eH pour se rendre au collège.

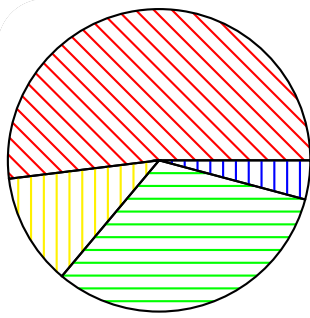
1. Complétez le tableau donnant, pour chaque valeur du caractère étudié, l'effectif, la fréquence et l'angle du diagramme circulaire associé.
2. Réalisez le diagramme circulaire des moyens de transports empruntés par les élèves pour venir au collège.





Réponse

Voici le tableau complété.

Transport	(B) en bus	(P) à pied	(V) en voiture	(A) autre	Total
Effectif	13	3	8	1	25
Fréquence	$\frac{13}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$	1
Angle (°)	$360 \times \frac{13}{25} \approx 187$	$360 \times \frac{3}{25} \approx 43$	$360 \times \frac{8}{25} \approx 115$	$360 \times \frac{1}{25} \approx 14$	360

Réalisons le diagramme circulaire.



-  (B) en bus
-  (P) à pied
-  (V) en voiture
-  (A) autre

Moyens de transport

En additionnant les angles des différents secteurs du diagramme circulaire on obtient :

$$187 + 43 + 115 + 14 = 359.$$

Le total n'est pas égal à la valeur attendue (soit 360°) car chaque angle est arrondi au degré près, ce qui introduit une légère approximation.

Lorsqu'on additionne les angles, ces erreurs d'arrondi sont ici cumulées avec pour effet, dans cet exemple, une erreur d'arrondi sur la valeur totale.

3 Calculs de moyennes

3.1 Moyenne simple

Définition 4 (indicateur de tendance centrale)

Un **indicateur de tendance centrale** d'une série statistique est une valeur autour de laquelle se concentrent les données.

Définition 5 (moyenne)

La **moyenne** d'une série de données est égale au quotient de la somme de ces données par l'effectif total.

$$\text{moyenne} = \frac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}$$

Elle est couramment noté à l'aide d'une lettre surmontée d'une barre : \bar{m} .

La moyenne est un indicateur de tendance centrale.

Exemple

Un randonneur effectue en quatre jours des marches de 16, 14, 17 et 15 kilomètres.

Il parcourt en moyenne chaque jour :

$$\bar{m} = \frac{16 + 14 + 18 + 15}{4} = \frac{62}{4} = 15,5 \text{ km.}$$

3.2 Moyenne pondérée**Définition 6 (moyenne pondérée)**

La **moyenne pondérée** d'une série de données est égale au quotient de la somme des produits de chaque valeur par son effectif, divisé par l'effectif total.

moyenne pondérée =

$$\frac{\text{somme des produits des valeurs par leur effectif}}{\text{effectif total}}$$

Exemple

1. Dans une compétition de tir, un athlète réalise les scores suivants : 9, 8, 10, 9 et 10.

Calculer sa moyenne de deux façons différentes.

2. Un examen comporte 3 épreuves coefficientées et notées sur 20 points.

Les candidats sont admis si leur moyenne est supérieure ou égale à 15/20.

Indrani a obtenu 17/20 en mathématique (coefficient 5), 15/20 en français (3) et 12/20 en informatique (coefficient 2).

Sera-t-elle admise ?

Réponse

1. - Calculons la moyenne de ses tirs par la méthode simple.

$$\bar{m} = \frac{9 + 8 + 10 + 9 + 10}{5} = 9,2.$$

- Calculons la moyenne de ses tirs par la méthode pondérée.

	valeurs			
	⏟			
Score	8	9	10	Total
Effectif	1	2	2	5
	⏟			⏟
	Effectif de la valeur 9			Effectif total

$$\bar{m} = \frac{8 \times 1 + 9 \times 2 + 10 \times 2}{5} = \frac{8 + 18 + 20}{5} = \frac{46}{5} = 9,2.$$

2. à l'aide d'un tableau, Calculons la moyenne d'Indrina, pondérée par les coefficients des épreuves :

Épreuve	Maths	Français	Informatique	Total
Coefficient	5	3	2	10
Note	17	15	12	

$$\bar{m} = \frac{5 \times 17 + 3 \times 15 + 2 \times 12}{5 + 3 + 2} = \frac{85 + 45 + 24}{10} = \frac{154}{10} = 15,4.$$

Indrina est admise.

4 Médiane d'une série statistique

Définition 7 (médiane)

On appelle **médiane** d'une série statistique triée un nombre qui partage la série en deux parties de même effectif. La médiane est un indicateur de tendance centrale.

4.1 Calculer une médiane avec un effectif impair

Propriété 3 (médiane avec un effectif impair)

La médiane d'une série statistique d'effectif impair de rang N est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$.

Exemple

Sur un présentoir, des statuettes sont classées par taille croissante.

Taille (en cm)	12	14	15	18	21	22	77
----------------	----	----	----	----	----	----	----

- Calculer la médiane de cette série.
- Séparer la série étudiée en deux sous-séries de même effectif.

Réponse

- L'effectif de la série étudié est $N = 7$.
Le rang de la médiane est $k = \frac{7+1}{2} = 4$.
La médiane est la valeur de rang 4 soit 18 cm.
- On peut séparer la série étudiée en deux sous-séries, de part et d'autre de la médiane :
 - celle comprenant les statuettes de taille 12 cm , 14 cm , 15 cm et 18 cm ;
 - celle comprenant les statuettes de taille 18 cm , 21 cm , 22 cm et 27 cm .

Exemple

Dans l'environnement Scratch, on crée une liste nommée *Lserie* comportant 7 valeurs correspondant aux tailles des statuettes, triées par ordre croissant (voir ci-dessous).

- Identifier les variables créées par l'utilisateur dans le script « calculer médiane avec un effectif impair ».
- Donner sous forme de tableau la valeur de chaque variable à la fin de l'exécution de chaque bloc.
- En déduire la valeur de la médiane.

Remarque : Le bloc longueur de Lserie ▾ donne le nombre d'éléments de la liste *Lserie*.

définir calculer médiane avec un effectif impair

2 mettre effectif ▾ longueur de Lserie ▾

3 mettre rang_médiane ▾ à $(\text{Effectif} + 1) / 2$

4 mettre mediane ▾ à élément rang_mediane de Lserie ▾

Lserie	
1	12
2	14
3	15
4	18
5	21
6	22
7	77

Réponse

- La variable *effectif* représente l'effectif de la série étudiée.
 - La variable *rang_mediane* qui indique le rang de la médiane dans la série.
 - La variable *mediane* associée à la valeur de la médiane.

De plus, la liste *Lserie* contient la liste ordonnée des valeurs de la série.

2. Voici le tableau demandé.

Numéro du bloc	Effectif	rang_mediane	mediane
2	7		
3	7	4	
4	7	4	18

3. La valeur de la médiane est 18.

En d'autre termes, la médiane de la série principale est 18.

4.2 Calculer une médiane avec un effectif pair

Propriété 4 (médiane avec un effectif pair)

Soit k est entier positif. La médiane d'une série statistique d'effectif pair de rang $N = 2k$ comprise entre la valeur de rang k et la valeur de rang $k + 1$.

En pratique, on prendra la moyenne entre ces deux valeurs.

Exemple

Lors d'une fête de Pâques, on prépare six paniers contenant des petits œufs.

Au dernier moment, on compte les œufs et on en trouve respectivement 51, 29, 28, 30, 40 et 32 par panier.

Calculer le nombre médian d'œufs par panier.

Réponse

Constituons une série statistique triée à partir du nombre d'œufs de chaque panier.

Nombre d'œufs d'un panier	28	29	30	32	40	51
---------------------------	----	----	----	----	----	----

L'effectif de cette série est $N = 6$.

Les valeurs centrales sont les valeurs de rang 3 et de rang 4, correspondant respectivement à 30 et 32 œufs.

Calculons la médiane Me .

$$Me = \frac{30 + 32}{2} = 31.$$

Le nombre médian d'œufs par panier est 31.

Exemple

Récupérons les paniers de Pâques, et rangeons la série statistique que nous avons déjà étudiée dans une liste de Scratch `Lserie`.

1. Identifier les variables utilisateurs dans le script « calculer médiane avec un effectif pair ».
2. Compléter le script.
3. Donner sous forme de tableau la valeur de chaque variable à la fin de l'exécution du script
4. En déduire la valeur de la médiane.

définir calculer médiane avec un effectif pair

2 mettre effectif ▾ longueur de Lserie ▾

3 mettre rang_a ▾ à $(\text{effectif}) / 2$

4 mettre rang_b ▾ à $(\text{rang_a}) + 1$

5 mettre valeur_a ▾ à élément rang_a de Lserie ▾

6 mettre valeur_b ▾ à élément rang_b de Lserie ▾

7 mettre mediane ▾ à $(\text{valeur_a}) + (\text{valeur_b}) / 2$

Lserie	
1	28
2	29
3	30
4	32
5	40
6	51
+ longueur 6 =	

Réponse

1.
 - La variable `effectif` représente l'effectif de la série étudiée.
 - Les variables `rang_a` et `rang_b` indiquent le rang des deux valeurs centrales.
 - Les variables `valeur_a` et `valeur_b` indiquent le rang des deux valeurs centrales.

- La variable *mediane* est associée à la valeur de la médiane.

La liste *Lserie* contient la liste ordonnée des valeurs de la série.

2. Présentons dans un tableau la valeur de chaque variable à la fin du script.

Num. du bloc	Effectif	rang_a	rang_b	valeur_a	valeur_b	mediane
6	6	3	4	30	32	31

3. La valeur de la médiane est 31 .

En d'autre termes, le nombre médian d'œufs par panier est 31 .