CHAPITRE 3

SOLIDES ET VOLUMES

1 Le prisme droit (rappels)

Définition 15 (polyèdre, sommet, face, arête)
Un **polyèdre** est un solide composé de polygones.
Chaque polygone est appelé une **face**.
Les **sommets** du solide sont les sommets des polygones.
Les **arêtes** du solide sont les côtés des polygones.

Définition 16 (prisme droit)
Un **prisme droit** est un solide qui possède :

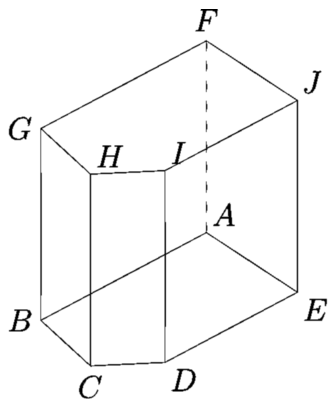
- deux faces parallèles et superposables qui sont des polygones, appelés **bases** ;
- des faces rectangulaires perpendiculaires aux bases, appelées **faces latérales**.

La **hauteur** d'un prisme droit est la longueur commune des arêtes latérales.

Exemple

Ci-contre :

- le solide $ABCDEFGHIJ$ est ...
- le polygone $ABCDE$ constitue ...
- le polygone $FGHIJ$ constitue ...
- ces deux polygones sont ...
- l'arête AF est ...



Remarque

Un pavé droit est un prisme droit dont les bases sont des rectangles.

2 Le cylindre de révolution (rappels)

Définition 17 (cylindre de révolution)

Un **cylindre de révolution** est un solide formé :

- d'une face en forme de disque ;
- d'une seconde face parallèle et superposable, en forme de disque de même rayon ;
- d'une surface courbe qui joint ces deux disques, appelée face latérale.

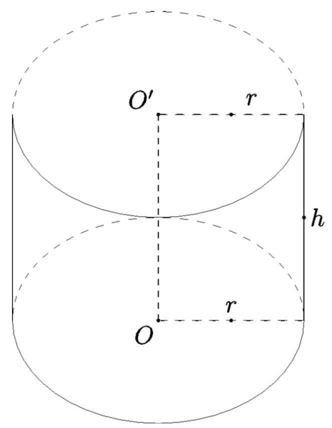
La **hauteur** d'un cylindre de révolution est la longueur du segment qui joint les centres des deux disques.

Exemple

Dans le cylindre ci-contre :

- le disque de centre O et de rayon r est ...
- le disque de centre O' et de rayon r est ...
- la longueur $OO' = h$ est la ...

On remarque que la hauteur $[OO']$ est perpendiculaire à chacun des disques.



3 La pyramide

Définition 18 (pyramide)

Une **pyramide** est un solide :

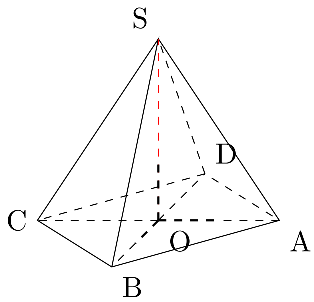
- dont une face est un polygone ;
- dont toutes les autres faces sont des triangles ayant un sommet en commun.

La **hauteur** d'une pyramide est le segment qui joint perpendiculairement le sommet de la pyramide et la base.

Exemple

$ABCDS$ est une pyramide à base rectangulaire telle que :

- sa base est ...
- son sommet est ...
- ses arêtes latérales sont ...
- sa hauteur est ...



Définition 19 (tétraèdre)

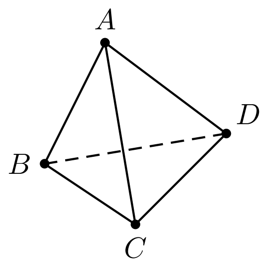
Un **tétraèdre** est une pyramide à base triangulaire.

On appelle **tétraèdre régulier**, un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Exemple

Ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre.

Ses quatre faces ABC, BCD, ABD et ACD sont des triangles équilatéraux.



4 Le cône

Définition 20 (cône)

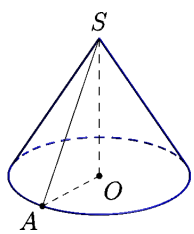
Le **cône** est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un coté de l'angle droit.
La **hauteur** d'un cône est le segment qui joint perpendiculairement le sommet de la pyramide et la base.
Une **génératrice** est un segment dont les extrémités sont le sommet du cône et un point du cercle de base.

Exemple

La base de ce cône est le disque de centre ... et de rayon ...

Il a pour sommet le point ...

Le segment ... est une génératrice du cône.



Définition 21 (patron)
Un **patron** d'un solide est une figure en vraie grandeur qui permet de construire ce solide en le découpant et en le pliant.

Remarque
Les patrons de la pyramide et du cône seront étudiés en « travaux pratiques ».

5 Volume et contenance

Définition 22 (volume)
Le volume d'un solide est la mesure de l'espace occupé par ce solide.

Définition 23 (unités de volume)
Les unités de volume suivantes sont fréquemment utilisées :

- le **mètre cube**, de symbole m^3 est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 m ;
- le **décimètre cube**, de symbole dm^3 est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 dm ;
- le **centimètre cube**, de symbole cm^3 est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 cm ;
- le **millimètre cube**, de symbole mm^3 est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 mm.

Définition 24 (litre)
1 **litre** (L) représente la contenance d'un cube dont l'arête mesure 1 dm.

$$1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3.$$

5.1 Volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution

Propriété 24 (volume d'une pyramide ou d'un cône)
Le volume d'une pyramide ou d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base $\mathcal{B}$ par sa hauteur h :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}.$$

Remarque

La base d'un cône de révolution est un disque de rayon r.
L'aire de ce disque est égale à $\pi \times r^2$.
Le volume du cône, dont on appellera h la hauteur, est donc :

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}.$$

5.2 Exemples

Exemple (volume d'une pyramide)

On considère qu'à sa construction la pyramide de Khéops avait pour modèle une base carrée de 230,5 m de côté et de hauteur 146,58 m.

1. Calculer la valeur approchée en m^3, arrondie à l'unité près, du volume de la pyramide.
2. Convertir cette valeur approchée en km^3, arrondie au millième près.

Réponse

1. La hauteur de la pyramide mesure $h = 146{,}58\,\text{m}$.
   L'aire du carré de côté $c = 230{,}5\,\text{m}$ mesure :
   $\mathcal{B} = c \times c = \ \ldots$
   Calculons le volume de la pyramide.
   $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \ \ldots$
   Le volume de la pyramide mesure donc environ ...
   Arrondissons le volume au m^3 près : $\mathcal{V} \approx \ \ldots$
2. A l'aide d'un tableau, convertissons le volume en km^3.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		

$\mathcal{V} \approx \ \ldots$

Exemple (volume d'un cône)

On considère un cône de diamètre $d = 800\,\text{cm}$ et de hauteur $h = 12\,\text{dm}$.

1. Calculer sa valeur exacte en m^3.
2. En prenant $\pi \approx 3,14$, arrondir cette valeur au dixième près.

Réponse

1. Convertissons les dimensions en m :
   $h = \ \ldots$
   $r = \ \ldots$
   Calculons le volume du cône :
   $\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \ \ldots$
   Le volume du cône mesure exactement $\ldots$
2. $\mathcal{V} \approx \ \ldots.$
   Le volume du cône correspond à une contenance d'environ $\ldots$

Exemple (volume d'un solide composé)

On dépose un cône et une pyramide métalliques dans une boîte en plastique dont la forme est un pavé droit.

La boîte a pour longueur $L = 20\,\text{cm}$, pour largeur $l = 12\,\text{cm}$ et pour hauteur $h_1 = 10\,\text{cm}$.

Le cône a pour rayon $r = 6\,\text{cm}$ et pour hauteur $h_2 = 8\,\text{cm}$.

La pyramide a pour hauteur $h_3 = 6\,\text{cm}$; sa base est un rectangle de longueur $a = 10\,\text{cm}$ et de largeur $b = 5\,\text{cm}$.

1. Calculer en cm^3 le volume d'eau $\mathcal{V}$ nécessaire pour remplir la boite contenant le cône et la pyramide.
2. En prenant $\pi \approx 3,14$, donner une valeur approché de $\mathcal{V}$ en cm^3 arrondie à l'unité.
3. Convertir cette valeur en litres en arrondissant au dixième.

Réponse

1. – Calculons le volume $\mathcal{V}_1$ de la boîte :
     $\mathcal{V}_\infty = L \times l \times h_1 = \ \ldots$
     Le volume de la boite mesure exactement ...
   – Calculons le volume $\mathcal{V}_\in$ du cône :
     $\mathcal{V}_\in = \ \ldots$
     Le volume du cône mesure exactement $\ldots$
   – Calculons l'aire de la base de la pyramide :
     $\mathcal{A} = a \times b = \ \ldots$
     L'aire de la base mesure ...
     Calculons le volume $\mathcal{V}_\ni$ de la pyramide :
     $\mathcal{V}_3 = \ \ldots$
     Le volume de la pyramide mesure exactement $\ldots$

- Calculons enfin le volume d'eau demandé :
  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3 = \ \ldots$

2. $\mathcal{V} \approx \ \ldots \ - \ \ldots \ \times 3,14 \approx \ \ldots .$
   Le volume d'eau mesure environ ...
3. $1\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{L}$.
   $\mathcal{V} \approx \ \ldots$