CHAPITRE 8

FRACTIONS

1 Rappels

1.1 Nombres premiers

Définition 34 (Nombre premier)

Soit n un nombre entier tel que $n \geq 2$.
Le nombre n est un premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Exemples

Le nombre 7 est divisible par 1 et par lui-même seulement : 7 est donc ...

Le nombre 6 est divisible par ... et par ... : 6 ...

1.2 Le crible d'Eratosthène

On considère le tableau ci-dessous, regroupant les nombres entiers compris entre 2 et 100.

On commence par éliminer 2, puis tous les multiples de 2.

Ensuite on élimine le plus petit entier restant, 3, et tous ses multiples qui ne sont pas encore éliminés. On réitère l'opération jusqu'à un stade que vous allez déterminer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été éliminés sont les nombres premiers inférieurs à 100.

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont donc :

...

1.3 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Définition 35 (décomposition en produit de facteurs premiers)
Si n est un entier supérieur à deux, il peut être **décomposé en produit de facteurs premiers**.

Exemple
Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants.

a. 70. b. 71. c. 72. d. 75.

Réponse
Décomposons 70. Décomposons 71. Décomposons 72. Décomposons 75.

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 71 & 71 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

En conclusion :

a. $70 = \dots \times \dots \times \dots$

b. le nombre 71 est ...

c. $72 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots$

d. $75 = \dots \times \dots \times \dots$

2 Fractions

2.1 quotients égaux

Propriété 35 (Quotients égaux)
Soient a, b et c des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$.
Alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}.$$

2.2 Simplification de fraction

Propriété 36 (simplifier une fraction)
Pour simplifier une fraction, on peut décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.

Exemple

Simplifier les fractions suivantes.

$\text{A} = \dfrac{24}{36}$. $\text{B} = \dfrac{6 \times 55}{10 \times 21}$.

Réponse

$\text{A} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2 \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \ldots$ $\text{B} = \dfrac{6 \times 55}{10 \times 21} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 11}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{3} \times 7} = \ldots$

2.3 Addition et soustraction

Fractions de même dénominateur

Propriété 37 (additionner des fractions de même dénominateur)

Pour calculer la somme (ou la différence) de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs.
- On garde le même dénominateur.

Soient a,b et c des nombres relatifs avec $c \neq 0$.
Alors :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Exemple

Calculer sous forme de fraction simplifiée.

$\text{A} = \dfrac{4}{11} + \dfrac{2}{11}$. $\text{C} = \dfrac{-3}{7} + \dfrac{-12}{7}$.

$\text{B} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{8}{13}$. $\text{D} = \dfrac{-5}{5,4} + \dfrac{-3,9}{5,4}$.

Réponse

$$\text{A} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{\ldots + \ldots}{11} = \ldots$$

$$\text{B} = \frac{5}{13} - \frac{8}{13} = \frac{\ldots - \ldots}{13} = \frac{\ldots}{13}$$

$$\text{C} = \frac{-3}{7} + \frac{-12}{7} = \frac{(\ \ldots\ ) + (\ \ldots\ )}{7} = \frac{\ldots}{7}$$

$$\text{D} = \frac{-5}{5,4} + \frac{-3,9}{5,4} = \frac{(\ \dots\ ) + (\ \dots\ )}{5,4} = \frac{\dots\ -\ \dots}{5,4} = \frac{\dots}{5,4}.$$

Fractions de dénominateurs différents

Propriété 38 (additionner des fractions de dénominateurs différents)
Pour calculer la somme (ou la différence) de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateurs différents :

1. On écrit les fractions avec le même dénominateur.
2. On applique la règle précédente (addition de fractions de même dénominateur).

Soient a,b c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
Alors :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}.$$

Exemple

Calculer sous forme de fraction simplifiée.

A= $\frac{3}{7} + \frac{5}{2}$.

B= $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$.

C= $-\frac{1}{4} - \frac{-2}{5}$.

D= $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

Réponse

A= $\frac{3}{7} + \frac{5}{2} = \frac{3 \times\ \dots}{7 \times\ \dots} + \frac{5 \times\ \dots}{2 \times\ \dots} = \ \dots$

B= $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1 \times\ \dots}{2 \times\ \dots} - \frac{1 \times\ \dots}{5 \times\ \dots} = \ \dots$

C= $-\frac{1}{4} - \frac{-2}{5} = -\frac{1 \times\ \dots}{4 \times\ \dots} - \frac{-2 \times\ \dots}{5 \times\ \dots} = \ \dots$

D= $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times\ \dots\ \times\ \dots}{2 \times\ \dots\ \times\ \dots} + \frac{1 \times\ \dots\ \times\ \dots}{3 \times\ \dots\ \times\ \dots} + \frac{1 \times\ \dots\ \times\ \dots}{4 \times\ \dots\ \times\ \dots} = \ \dots$

Exemple

Calculer astucieusement sous forme de fraction simplifiée.

A= $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{15}$.

B= $\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{10}$.

C= $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}$.

D= $\dfrac{-5}{6}+\dfrac{2}{9}$.

E= $\dfrac{-1}{20}-\dfrac{2}{15}$.

F= $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24}+\dfrac{1}{18.}$

Réponse

A= $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1\times\ \dots}{5\times\ \dots}+\dfrac{1}{15}=\ \dots$

B= $\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{10}=\dfrac{9}{20}-\dfrac{7\times\ \dots}{10\times\ \dots}=\ \dots$

C= $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1\times\ \dots}{4\times\ \dots}+\dfrac{1\times\ \dots}{6\times\ \dots}=\ \dots$

D= $\dfrac{-5}{6}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{-5\times\ \dots}{6\times\ \dots}+\dfrac{2\times\ \dots}{9\times\ \dots}=\ \dots$

E= $\dfrac{-1}{20}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{-1\times\ \dots}{20\times\ \dots}-\dfrac{2\times\ \dots}{15\times\ \dots}=\ \dots$

F= $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{5\times\ \dots}{12\times\ \dots}+\dfrac{7\times\ \dots}{24\times\ \dots}+\dfrac{1\times\ \dots}{18\times\ \dots}=\ \dots$

2.4 Multiplication de fractions

Propriété 39 (multiplier des fractions)

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

Soient a,b,c et d des nombres relatifs avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$.
Alors :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Exemple

Effectuer le calcul suivant.

A= $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{3}$.

Réponse

A$= \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}.$

Propriété 40 (multiplication de fractions : règle des signes)
Pour déterminer le signe d'un produit de fractions, on applique la règle des signes.

Exemples

Déterminer le signe des produits suivant puis les calculer sous forme de fraction.

A$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-2}{5}.$

B$= \dfrac{3}{-2} \times \dfrac{-1}{7}.$

C$= \dfrac{1}{-2} \times \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{-1}{4}.$

D$= -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{-2}{7}.$

Réponses

A$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-2}{5} = \ \ldots \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} = \ \ldots \dfrac{2 \times 1}{3 \times 5} = \ \ldots \dfrac{2}{15}.$

B$= \dfrac{3}{-2} \times \dfrac{-1}{7} = \ \ldots \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{7} = \ \ldots \dfrac{3 \times 1}{2 \times 7} = \ \ldots \dfrac{3}{14}.$

C$= \dfrac{1}{-2} \times \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{-1}{4} = \ \ldots \dfrac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 3 \times 4} = \ \ldots \dfrac{1}{24}.$

D$= -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{-2}{7} = \ \ldots \dfrac{2 \times 2}{3 \times 7} = \ \ldots \dfrac{4}{21}.$

3 Problèmes

Exemple

Un cultivateur lègue à chacun de ses trois enfants une partie distincte d'un champ.
Aino reçoit $\dfrac{3}{7}$ de la surface totale et Birel reçoit $\dfrac{2}{5}$ de la surface totale.
Enfin, Chikayo reçoit une parcelle de $240\,\text{m}^2$.

Calculer la surface totale initiale du champ.

Réponse

Déterminons quelle fraction de la surface du champ reçoit Chikayo.

$1 - \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{7 \times 5} - \frac{3 \times \ \ldots}{7 \times \ \ldots} - \frac{2 \times \ \ldots}{5 \times \ \ldots} = \ \ldots$

Chikayo reçoit une partie de la surface initiale x du champ égale à ...
Par ailleurs, la partie du champs léguée à Chikayo mesure ...
On en déduit l'égalité suivante :

$\ldots \ \times x = 240$

Cette égalité constitue une équation du premier degré, d'inconnue x, que nous allons résoudre.

$\frac{\ldots}{\ldots} \times x = 240$

$\ldots$

$\ldots$

La partie du champ que reçoit Chikayo mesure ...

Exemple

Daiki et Eiko cueillent des cerises dans leur jardin et ramassent $\frac{3}{5}$ des cerises.

Daiki garde $\frac{7}{12}$ des fruits récoltés.

Quelle partie des cerises de l'arbre Daiki a-t-il conservé ?

Réponse

Je calcule la fraction des cerises récoltées conservées par Eiko :

$1 - \ \ldots \ = \ \ldots$

Eiko conserve ... de la récolte.

Eiko conserve donc ... de $\frac{3}{5}$ des cerises de l'arbre, soit :

$\ldots \ \times \frac{3}{5} = \ \ldots$

Eiko conserve ... des cerises de l'arbre.

Exemple

Deux mathématiciennes facétieuses dînent au restaurant.

Fujiko propose de payer $\frac{7}{15}$ du total.

Gimko propose alors de payer $\frac{5}{6}$ de la somme proposée par Fujiko.

a. Le total suffira-t-il à payer l'addition ?

b. Si non, quelle fraction faut-il ajouter ? Si oui, à quelle fraction du total correspond le pourboire ?

c. En supposant que l'addition s'élève à 81 €, calculer le complément.

Réponse

a. Gimko propose de payer une fraction de l'addition égale à :

$$\frac{\dots}{\dots} \times \frac{5}{6} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Les deux mathématiciennes paieraient alors une faction de l'addition égale à :

$$\frac{7}{15} + \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

On constate que $\frac{\dots}{\dots} < 1$.

La somme proposée n'est donc pas suffisante.

b. $1 - \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Il manque une fraction de l'addition égale à ...

c. L'addition s'élève à 81 €.

$$\frac{\dots}{\dots} \times 81 = \dots$$

Il manque donc … €.