CHAPITRE 12

DIVISION DE FRACTIONS

1 Notion d'inverse

Définition 43 (inverse)
Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemple
$4 \times 0,25 = 1$.

- Le nombre 4 est l'inverse de ...
- Le nombre 0,25 est l'inverse de ...
- Les nombres ... et ... sont inverses l'un de l'autre.

Propriété 45 (signe de l'inverse d'un nombre)
Un nombre et son inverse ont le même signe.

Exemple

$(+10) \times (\ \dots\ ) = 1$. L'inverse de $(+10)$ est $(\ \dots\ )$.

$(-2) \times (\ \dots\ ) = 1$. L'inverse de (-2) est $(\ \dots\ )$.

Remarques

$(+1) \times (+1) = 1.$ L'inverse de 1 est 1.

$(-1) \times (-1) = 1.$ L'inverse de (-1) est (-1).

$0 \times \ ? = 1.$ Le nombre 0 ...

Propriété 46 (inverse d'un nombre x)
Soit x un nombre non-nul. L'inverse du nombre x est le nombre $\dfrac{1}{x}$.

Exemple

$11 \times \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$ L'inverse de 11 est $\dfrac{\dots}{\dots}$.

$(-7) \times \dfrac{\dots}{(\dots)} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$ L'inverse de (-7) est $\dfrac{\dots}{-\dots}$ soit $-\dfrac{\dots}{\dots}$.

Remarque

Attention à ne pas confondre un nombre et son opposé :

- la *somme* d'un nombre et de son opposé est égale à 0 : $(7) + (\dots) = \dots$
- le *produit* d'un nombre et de son inverse est égale à 1 : $(7) \times (\dfrac{\dots}{\dots}) = \dots$

Exemple

Donner sous forme de fraction ou d'entier relatif, sans justification, l'opposé et l'inverse de chacun des nombres suivants :

a. -10.
b. -3.
c. -1.
d. -0,5.
e. 0,1.
f. 2.
g. 100.
h. 1 000.

Présenter les résultats sous forme de tableau.

Réponse

Nombre	-10	-3	-1	-0,5	0,1	2	100	1 000
Oppposé	...	...	...	...	...	...	...	...
Inverse	...	...	...	...	...	...	...	...

2 Inverse d'une écriture fractionnaire ou d'une fraction

Propriété 47 (inverse d'un nombre en écriture fractionnaire)
Soient a et b deux nombres avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Le nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ possède un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Exemple
$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$
Les nombres $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$ sont ...

3 Division de fractions

Propriété 48 (division de fractions)
Soient a, b, c et d quatre nombres avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Remarque

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \text{inverse de } (\frac{c}{d}) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Exemple
a. Calculer $x = \frac{\frac{28}{33}}{\frac{8}{15}}$.

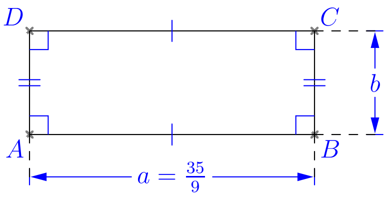
b. On considère un rectangle de longueur $L = \frac{35}{9}$ m et d'aire $\mathcal{A} = \frac{20}{3}$ m^2.

Calculer sa largeur l sous forme de fraction simplifiée.

Réponse

a. $x = \dfrac{\frac{\cdots}{\cdots}}{\frac{\cdots}{\cdots}} = \dfrac{\cdots}{\cdots} \times \dfrac{\cdots}{\cdots} = \dfrac{\cdots \times \cdots}{\cdots \times \cdots} = \dfrac{\cancel{\cdots} \times \cdots \times \cancel{\cdots} \times \cdots}{\cancel{\cdots} \times \cdots \times \cdots \times \cancel{\cdots}} = \dfrac{\cdots}{\cdots}.$

b. Représentons le rectangle étudié.



L'aire du rectangle est donnée par $\mathcal{A} = L \times l$.

On a donc $l = \dfrac{\mathcal{A}}{L}$.

$l = \dfrac{\frac{\cdots}{\cdots}}{\frac{\cdots}{\cdots}} = \dfrac{\cdots}{\cdots} \times \dfrac{\cdots}{\cdots} = \dfrac{\cdots \times \cdots}{\cdots \times \cdots} = \dfrac{\cdots \times \cancel{\cdots} \times \cancel{\cdots} \times \cdots}{\cancel{\cdots} \times \cdots \times \cancel{\cdots}} = \dfrac{\cdots}{\cdots}.$

La largeur du rectangle mesure ...

Propriété 49 (division d'un fraction par un nombre décimal)
Soient a, b et c trois nombres avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c}.$$

Remarque

Fixons $d = 1$ dans la formule de la propriété précédente. Il vient : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a \times 1}{b \times c}$.

Ce qui nous donne : $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \times c}$.

Exemple

c. On divise une tarte aux pommes en deux moitiés, puis chaque moitié est divisée en six petites parts égales.

Quelle fraction de la tarte représente chaque petite part ?

d. Calculer $B = \dfrac{\frac{5}{2}}{3}$.

Réponse

c. $\dfrac{\frac{1}{2}}{6} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{1}} = \dfrac{\dots}{\dots} \times \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$.

Un petite part représente ... de la tarte entière.

d. $B = \dfrac{\frac{5}{2}}{3} = \dfrac{\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}} = \dfrac{\dots}{\dots} \times \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$.

Exemple

Résoudre les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

a. $x - \dfrac{1}{4} = 1$.

b. $\dfrac{2}{3}x = 1$.

c. $x - \dfrac{1}{3}x = 1$.

Réponse

a. $x - \dfrac{1}{4} = 1$

$x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1 + \dfrac{1}{4}$

$x = \dfrac{4}{4} + \dfrac{1}{4}$

$y = \dfrac{4+1}{4}$

$x = \dfrac{5}{4}$.

La solution de l'équation est $\dfrac{5}{4}$.

b. $\dfrac{2}{3}x = 1$

$\dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{3}x = 1 \times \dfrac{3}{2}$

$x = \dfrac{3}{2}$.

La solution de l'équation est $\dfrac{3}{2}$.

c. $x - \dfrac{1}{3}x = 1$

$1 \times x - \dfrac{1}{3}x = 1$

$(1 - \dfrac{1}{3})x = 1$

$(\dfrac{3}{3} - \dfrac{1}{3})x = 1$

$\dfrac{3-1}{3}x = 1$

$\dfrac{2}{3}x = 1$

$3 \times \dfrac{2}{3}x = 1 \times 3$

$2x = 3$

$\dfrac{2}{2}x = \dfrac{3}{2}$

$x = \dfrac{3}{2}$.

La solution de l'équation est $\dfrac{3}{2}$.

Exemple

Résoudre les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

d. $-\frac{4}{3}x = 1.$

e. $\frac{7}{2}x = 0.$

Réponse

d. $-\frac{4}{3}x = 1$

$(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{4}{3})x = 1 \times (-\frac{3}{4})$

$x = -\frac{3}{4}.$

La solution de l'équation est $-\frac{3}{4}$.

e. $\frac{7}{2}x = 0$

On pourrait conclure dès maintenant, mais détaillons.

$\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}x = 0 \times \frac{2}{7}$

$x = 0.$

La solution de l'équation est 0.

Exemple

Résoudre les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

f. $\frac{4}{3}x = \frac{7}{11}$

g. $\frac{-2}{3}x = -\frac{-5}{4}$

Réponse

f. $\frac{4}{3}x = \frac{7}{11}$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}x = \frac{7}{11} \times \frac{3}{4}$

$x = \frac{7 \times 3}{11 \times 4}$

$x = \frac{21}{44}.$

La solution de l'équation est $\frac{21}{44}$.

g. $\frac{-2}{3}x = -\frac{-5}{4}$

$\frac{3}{-2} \times \frac{-2}{3}x = -\frac{-5}{4} \times \frac{3}{-2}$

$x = -\frac{5 \times 3}{4 \times 2}$

$x = -\frac{15}{8}.$

La solution de l'équation est $-\frac{15}{8}$.

Exemple

Résoudre les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

h. $\frac{2}{5}x = 1 - \frac{3}{4}$

i. $\frac{3}{4}x - 2 = x + \frac{1}{3}$

j. $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$

Réponse

h. $\frac{2}{5}x = 1 - \frac{3}{4}$

$\frac{2}{5}x = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$

$\frac{2}{5}x = \frac{4-3}{4}$

$\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}$

$\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}x = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2}$

$x = \frac{1 \times 5}{4 \times 2}$

$x = \frac{5}{8}.$

La solution de l'équation est $\frac{5}{8}$.

i. $\frac{3}{4}x - 2 = x + \frac{1}{3}$

$\frac{3}{4}x - 2 + 2 = x + \frac{1}{3} + 2$

$\frac{3}{4}x = x + \frac{1}{3} + 2$

$\frac{3}{4}x - x = x + \frac{1}{3} + 2 - x$

$\frac{3}{4}x - x = \frac{1}{3} + 2$

$\frac{3}{4}x - \frac{4}{4}x = \frac{1}{3} + 2$

$\frac{3-4}{4}x = \frac{1}{3} + 2$

$\frac{-1}{4}x = \frac{1}{3} + 2$

$\frac{-1}{4}x = \frac{1}{3} + \frac{2 \times 3}{3}$

$\frac{-1}{4}x = \frac{1}{3} + \frac{6}{3}$

$\frac{-1}{4}x = \frac{1+6}{3}$

$\frac{-1}{4}x = \frac{7}{3}$

$\frac{4}{-1} \times \frac{-1}{4}x = \frac{7}{3} \times \frac{4}{-1}$

$x = -\frac{7 \times 4}{3 \times 1}$

$x = -\frac{28}{3}$

La solution de l'équation est $-\frac{28}{3}$.

j. $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$

$2 \times \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3} \times 2$

$x + 1 = 2 \times \frac{x-1}{3}$

$3 \times (x+1) = 2 \times \frac{x-1}{3} \times 3$

$3 \times (x+1) = 2 \times \frac{x-1}{3} \times 3$

$3 \times x + 3 \times 1 = 2(x-1)$

$3x + 3 = 2 \times x - 2 \times 1$

$3x + 3 = 2x - 2$

$3x + 3 - 2x = 2x - 2 - 2x$

$x + 3 = -2$

$x + 3 - 3 = -2 - 3$

$x = -5.$

La solution de l'équation est -5.

4 Résoudre un problème

Exemple

Pendant ses loisirs du week-end, Thiago passe les deux cinquièmes de son temps à discuter avec ses amis et le tiers de son temps à s'informer.

Quelle fraction de son temps lui reste-t-il pour jouer en ligne ?

Réponse

Appelons x la fraction du temps de loisirs de Thiago disponible pour le jeu en ligne.
Nous avons : $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+x=1$.

Résolvons cette équation.

$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+x=1$

$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+x-\frac{2}{5}=1-\frac{2}{5}$

$\frac{1}{3}+x=1-\frac{2}{5}$

$\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}=1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$

$x=1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$

$x=1\times\frac{3\times5}{3\times5}-\frac{2\times3}{5\times3}-\frac{1\times5}{3\times5}$

$x=\frac{15}{15}-\frac{6}{15}-\frac{5}{15}$

$x=\frac{15-6-5}{15}$

$x=\ \ldots$

Thiago dispose de ... de son temps de loisir pour jouer en ligne.

Exemple

Parmi les employés d'une société :

- $\frac{3}{10}$ habitent à moins de 5 km de leur lieu de travail ;
- $\frac{2}{5}$ habitent à plus de 5 km et à moins de 10 km de leur lieu de travail ;
- $\frac{1}{4}$ habitent à plus de 10 km et à moins de 15 km de leur lieu de travail.

Quelle pourcentage des employés habitant à plus de 15 km de leur lieu de travail ?

Réponse

Soit x la fraction des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail.

$\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+x=1$.

Résolvons cette équation.

$\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+x-\frac{3}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=1-\frac{3}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$

$x=1-\frac{3}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$

$x=1\times\frac{20}{20}-\frac{3\times2}{10\times2}-\frac{2\times4}{5\times4}-\frac{1\times5}{4\times5}$

$x = \frac{20}{20} - \frac{6}{20} - \frac{8}{20} - \frac{5}{20}$

$x = \frac{20-6-8-5}{20}$

$x = \ \dots$

... des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail.
On souhaite écrire cette proportion sous forme d'un pourcentage. Il faut donc ramener le dénominateur à 100.

$x = \ \dots$

En conclusion, ... des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail.

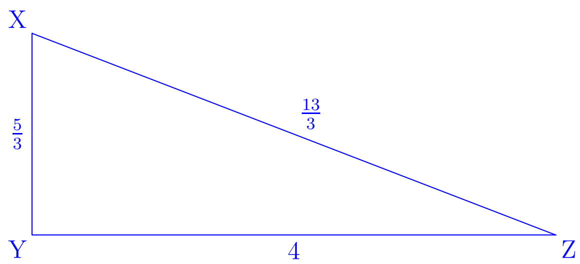
Exemple
Le triangle YYZ est tel que $XY = \frac{5}{3}$ m, $YZ = 4$ m et $XZ = \frac{13}{3}$ m.

a. Démontrer que le triangle XYZ est un triangle rectangle.

b. Calculer l'aire du triangle.

c. Calculer le périmètre du triangle.

Réponse
Représentons le triangle étudié.



a. $YY \approx 1{,}7$ m et $XZ \approx 4{,}3$ m.
   XZ est donc le côté le plus long du triangle YYZ.
   Vérifions si l'égalité de Pythagore est vraie dans ce triangle.
   – D'une part,
     $(\ \dots\ )^2 = (\frac{\dots}{\dots})^2 = \frac{\dots}{\dots}$.
   – D'autre part,
     $(\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = (\frac{\dots}{\dots})^2 + \ \dots\ ^2 = \frac{\dots}{\dots} + \ \dots\ = \frac{\dots}{\dots} + \ \dots \times \frac{\dots}{\dots}$
     $(\ \dots\ ) + (\ \dots\ )^2 = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$.

Je constate que $XZ^2 \ \dots \ XY^2 + XZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle XYZ est ...

b. Dans un triangle rectangle, on peut prendre l'un des deux petits côtés comme base (choisissons XY) et l'autre comme hauteur (YZ).

Nous pouvons donc calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle YYZ.

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \frac{\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots}}{2} = \frac{\frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots}}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}.$$

L'aire du triangle XYZ mesure exactement ... soit environ ...

c. Calculons le périmètre $\mathcal{P}$ du triangle XYZ.

$\mathcal{P} = XY + YZ + YZ$

$\mathcal{P} = \ \dots$

Le périmètre du triangle XYZ mesure exactement ...