CHAPITRE 14

THÉORÈME DE THALÈS

1 Le théorème de Thalès

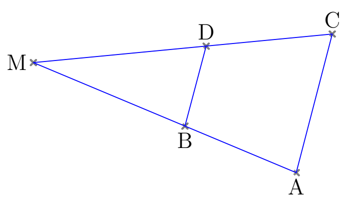
Théorème 4 (théorème de Thalès)
Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- les droites (AB) et (CD) sont sécantes en M ;
- les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

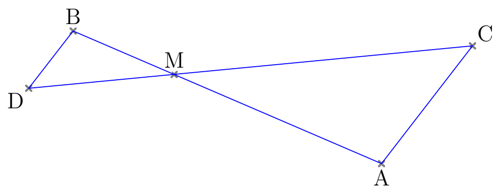
Alors les longueurs des triangles ACM et BDM sont proportionnelles.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CM}{DM} = \frac{AC}{BD}.$$

Remarque
Pour satisfaire aux conditions du théorème de Thalès, les points A, B, C, D et M doivent être disposés soit « en triangles emboités », soit « en papillon », comme dans ces deux exemples.



Configuration en ...



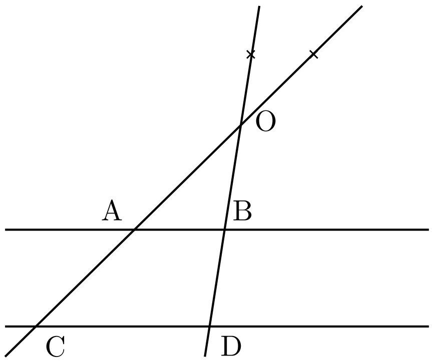
Configuration en ...

Dans le cadre du programme de quatrième, nous étudierons seulement les configurations « en triangles emboités ». Les « papillons » seront étudiés en classe de troisième.

2 Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès

Exemple

D'après le sujet de brevet d'Asie, 2001.
Les points O, A, C sont alignés dans cet ordre.
Les points O, B, D sont alignés dans cet ordre.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne $OA = 2{,}4\,\text{cm}$; $OC = 6\,\text{cm}$; $OD = 5\,\text{cm}$; $AB = 1{,}5\,\text{cm}$.



1. Calculer OB.
2. Calculer CD.

Réponse

On sait que :

- Les droites (AC) et (BD) se coupent en ...
- Les droites (AB) et (CD) sont ...

Les conditions d'applications du théorème de Thalès sont réunies et l'on a :

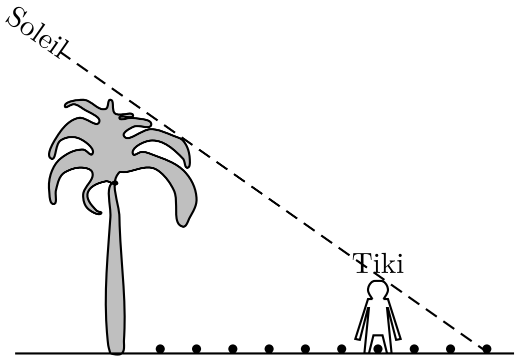
$$\frac{\ldots}{OB} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

1. L'égalité $\frac{\ldots}{OB} = \frac{\ldots}{\ldots}$ est vraie.
   Nous pouvons donc calculer OB par un produit en croix.
   $\frac{\ldots}{OB} = \frac{\ldots}{\ldots}$ $\qquad OB = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$ $\qquad OB = \ldots$
   La longueur OB mesure ...

2. L'égalité $\frac{\ldots}{\ldots} = \frac{CD}{\ldots}$ est vraie.
   Nous pouvons donc calculer CD par un produit en croix.
   $\frac{\ldots}{\ldots} = \frac{CD}{\ldots}$ $\qquad CD = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$ $\qquad CD = \ldots$
   La longueur CD mesure ...

Exemple

D'après le sujet de brevet de Polynésie (18 juin 2013)
Dans le croquis ci-dessous, le tiki représente Moana.

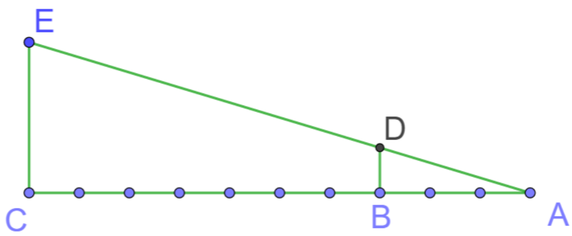


Moana a d'abord posé sur le sol, **à partir du cocotier**, des noix de coco régulièrement espacées à chacun de ses pas, puis il s'est ensuite placé exactement comme indiqué sur le croquis, au niveau de la 7e noix de coco.
En 111 pas, Moana parcourt exactement 100 m.
Moana mesure 1,80 m.

Calculez la hauteur du cocotier en expliquant clairement votre démarche.

Réponse

On peut modéliser la situation par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle.



Analysons ce schéma :

a. Le segment [. . .] représente le cocotier et le segment [. . .] représente Moana.

b. On suppose que Moana se tient droit, et que l'arbre a poussé verticalement. Les droites (CE) et (BD) sont donc ...

c. La géométrie du problème est telle que les droites (BC) et (DE) se coupent en ...

Les conditions d'application du théorème de Thalès sont donc vérifiées, et l'on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Les noix de coco sont régulièrement espacées, Moana se tient au niveau de la septième noix de coco, sur un total de 10, et donc :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de calculer la longueur moyenne d'un pas de Moana ($\frac{100}{111}$).
Comme Moana mesure 1,80 m on a $BD = \ \ldots$ et :

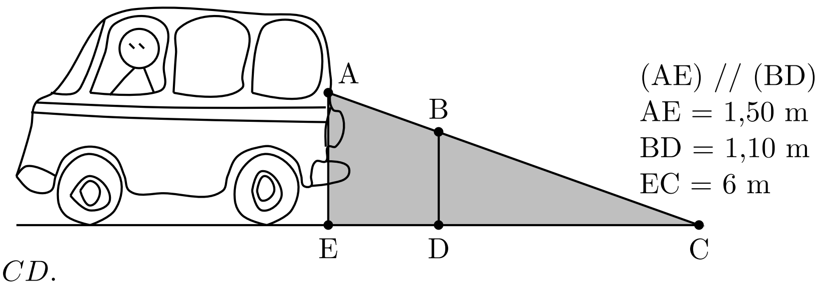
$$\frac{\ldots}{CE} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Donc : $CE = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots} = \ \ldots$

La hauteur du cocotier est ...

Exemple

D'après le sujet de brevet de Nouvelle Calédonie (10 décembre 2013)
En se retournant lors d'une marche arrière, le conducteur d'une camionnette voit le sol à 6 mètres derrière son camion.
Sur le schéma, la zone grisée correspond à ce que le conducteur ne voit pas lorsqu'il regarde en arrière.



1. Calculer CD.
2. En déduire que $DE = 1{,}60$ m.
3. Une fillette mesure 1,10 m. Elle passe à 1,40 m derrière la camionnette.
   Le conducteur peut-il la voir ? Expliquer.

Réponse

1. On observe que :
   - Les droites (AB) et (ED) sont sécantes en ...
   - Les doites (AE) et (BD) sont ...

   Les conditions du théorème de Thalès sont vérifiées et on a :

   $$\frac{\ldots}{CD} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

   Nous cherchons CD et nous ne connaissons pas AC. La partie utile de cette triple égalité est donc :

   $$\frac{\ldots}{CD} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

   Donc $\dfrac{\ldots}{CD} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ et $CD = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots} = \ \ldots$
   En conclusion, $CD = \ \ldots$

2. Par soustraction : $DE = \ \dots \ - \ \dots \ = \ \dots \ - \ \dots \ = \ \dots$

   La distance DE mesure $\dots$

3. la jeune fille se tient à 1,40 m du camion, donc « entre E et D ».

   Dans cette zone, toute personne de taille inférieure à BD, donc toute personne plus petite que … , sera dans la zone grisée.

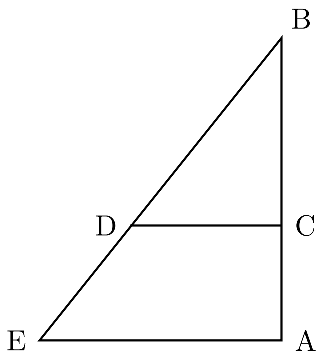
   La jeune fille mesure …

   Elle est donc dans la zone grisée, ce qui signifie …

Exemple

D'après le sujet de brevet de Polynésie (juin 2014)
Pour construire un mur vertical, il faut parfois utiliser un coffrage et un étayage qui maintiendra la structure verticale le temps que le béton sèche.
Cet étayage peut se représenter par le schéma ci-dessous.
Les poutres de fer sont coupées et fixées de façon que :

- Les segments $[AB]$ et $[AE]$ sont perpendiculaires.
- C est situé sur la barre $[AB]$.
- D est situé sur la barre $[BE]$.
- $AB = 3{,}5\,\text{m}$; $AE = 2{,}625\,\text{m}$ et $CD = 1{,}5\,\text{m}$.



1. Calculer BE.
2. les barres $[CD]$ et $[AE]$ doivent être parallèles. À quelle distance faut-il placer le point C ?

Réponse

1. Les segments $[\ \dots\ ]$ et $[\ \dots\ ]$ sont perpendiculaires, donc le triangle ABE est rectangle en … et, d'après le théorème de Pythagore :

$$(\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2$$

$(\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2$
$\dots\ + 6,890625 = BE^2$
$BE^2 = \ \dots$
$BE = \sqrt{\dots}$
$BE = \ \dots$

La longueur BE mesure …

2. Il est clair que le point B appartient au segment $[AB]$, mais nous devons déterminer sa position précise.

   Les droites (CD) et (AE) doivent être parallèles.

   Comme, de plus, les droites (DE) et (AC) se coupent en ... , le théorème de Thalès s'applique et l'on a :

$$\frac{\dots}{BC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

   On connait AB, AE, CD et nous voulons calculer BC.

   De la triple égalité de Thalès, nous allons donc extraire :

$$\frac{\dots}{BC} = \frac{\dots}{\dots}$$

   Donc $BC = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$

   Il faut donc placer le point C sur le segment $[\dots]$, à ... cm du point ...

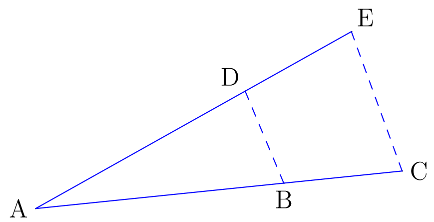
3 La contraposée du théorème de Thalès

Théorème 5 (contraposée du théorème de Thalès)

Soient (BC) et (DE) deux droites sécantes en A.
Si :

$$\frac{AC}{AB} \neq \frac{AE}{AD}.$$

Alors les droites (BD) et (EC) ne sont pas parallèles.

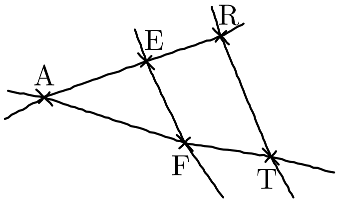


Exemple

D'après le sujet de brevet d'Amérique du Nord (4 juin 2019)
On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle.
On donne les informations suivantes :

- les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A ;
- AE = 8 cm, AF = 10 cm, EF = 6 cm ;

– AR = 12 cm, AT = 14 cm.



Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

Réponse

Les droites (RE) et (TF) sont sécantes en ...

Comparons les quotients $\dfrac{AR}{AE}$ et $\dfrac{AT}{AF}$.

– D'une part, $\dfrac{AR}{AE} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

– D'autre part, $\dfrac{AT}{AF} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

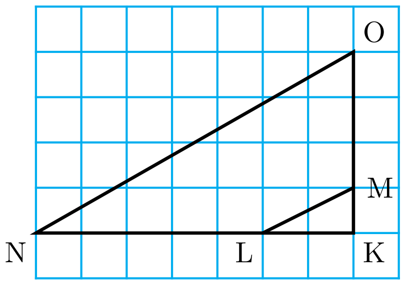
Nous constatons que $\dfrac{AR}{AE} \ldots \dfrac{AT}{AF}$.

Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, nous pouvons conclure que les droites (EF) et (RT) ...

Exemple

D'après le sujet de brevet de Métropole, Antilles et Guyane (septembre 2014)

Dans ce dessin, les points sont placés sur les sommets d'un quadrillage à maille carrée.



Les droites (ML) et (NO) sont-elles parallèles ?

Réponse

Le quadrillage indique que les droites (OM) et (NL) sont sécantes en ...

Comparons les quotients $\dfrac{KN}{KL}$ et $\dfrac{KO}{KM}$.

– D'une part, $\dfrac{KN}{KL} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

– D'autre part, $\dfrac{KO}{KM} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

Nous constatons que $\frac{KN}{KL} \ldots \frac{KM}{KO}$.

Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, nous pouvons conclure que les droites (OM) et (OL) ...

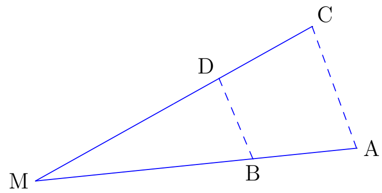
4 La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 6 (réciproque du théorème de Thalès)

Soient (AB) et (BC) deux droites sécantes en M.
Si :

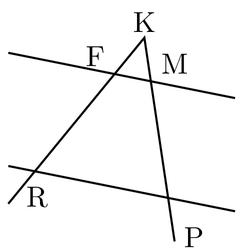
$$\frac{AM}{AB} = \frac{CM}{CD}.$$

Alors les droites (BD) et (AC) sont parallèles.



Exemple

D'après le sujet de brevet de Nouvelle Calédonie (mars 2014)
Sur cette figure, les points K, F, R et K, M, P sont alignés.
On donne $KF = 3$, $KR = 9$, $KM = 4$ et $KP = 12$.



Les droites (FM) et (PM) sont-elles parallèles ?

Réponse

D'après la figure, les droites (RF) et (FM) se coupent en ...

Comparons $\frac{KF}{KR}$ et $\frac{KM}{KP}$.

- D'une part, $\frac{KF}{KR} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = \ldots$

– D'autre part, $\dfrac{KM}{KP} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = \ldots$

Je constate que $\dfrac{KF}{KR} \ldots \dfrac{KM}{KP}$.

En conclusion, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FM) et (RP) ...

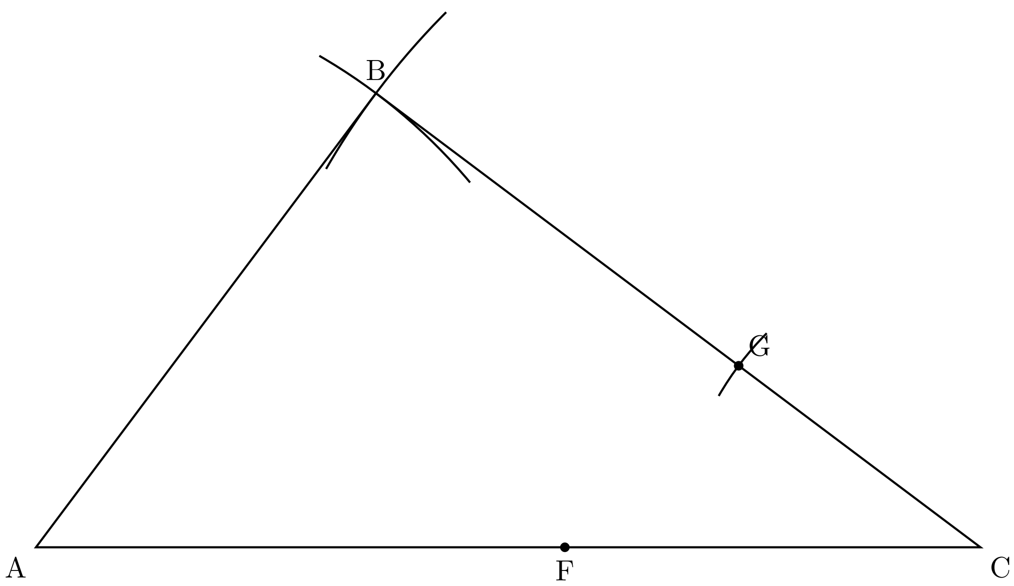
Exemple

D'après le sujet de brevet de Pondichéry (avril 2010)

1. Construire un triangle ABC tel que : $AB = 7,5\ cm$; $BC = 10\ cm$ et $AC = 12,5\ cm$.
   Construire le point F appartenant au segment $[AC]$ tel que $CF = 5\ cm$.
   Construire le point G appartenant au segment $[BC]$ tel que $CG = 4\ cm$.
2. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.
3. Montrer que les droites (AB) et (FG) sont parallèles.
4. Montrer que la longueur FG est égale à $3\ cm$.
5. Les droites (FG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

Réponse

1. On applique le programme de construction d'un triangle vu en sixième :
   - tracer un segment $[AC]$ de longueur ...
   - tracer le cercle de centre A et de rayon ...
   - tracer le cercle de centre C et de rayon ...
   - placer le point B à l'intersection ...



2. Pour prouver qu'un triangle est rectangle, j'utilise ...

   Dans le triangle ABC, le côté le plus long est ... et :

   - D'une part, $(\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2 = \ \dots$
   - D'autre part, $(\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = \ \dots\ + \ \dots\ = \ \dots$

   Je constate que $AC^2 \ \dots\ AB^2 + BC^2$.

   Donc, d'après ... le triangle ABC est rectangle en ...

3. Par construction, les droites (AF) et (BG) sont sécantes en C.

   Comparons $\dfrac{CA}{CF}$ et $\dfrac{CB}{CG}$

   - D'une part, $\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{12,5}{5} = 2,5$.
   - D'autre part, $\dfrac{CB}{CG} = \dfrac{10}{4} = 2,5$.

   Je note que $\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{CB}{CG}$.

   Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FG) et (AB) sont ...

4. Résumons :

   - Les droites (AF) et (BG) sont sécantes en ...
   - Nous venons de montrer que les droites (FG) et (AB) sont ...

   Nous pouvons donc appliquer le théorème de Thalès dans cette configuration et :

   $$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{FG}$$

   Donc $\dfrac{\dots}{FG} = \ \dots$ et $FG = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \ \dots$

   En conclusion, $FG = \ \dots$

5. Utilisons un chaînon déductif.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$(AB) \perp (BC)$ $(AB)//(FG)$	...	...

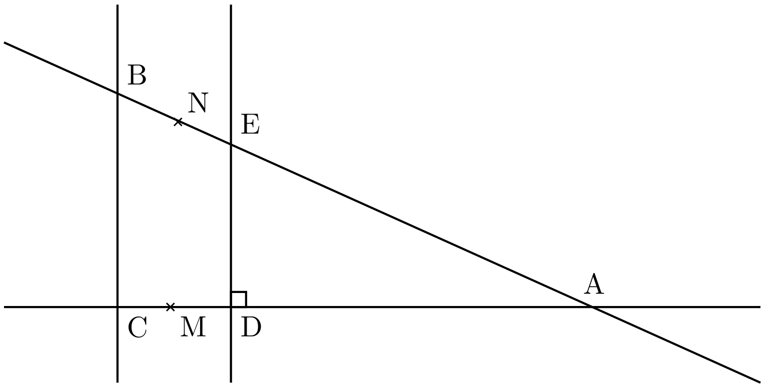
Exemple

D'après le sujet de brevet de Polynésie (septembre 2009)
L'unité de longueur est le cm. On donne :

- les points C, D et A sont alignés ;
- les points B, E et A sont alignés ;
- $(DE) \perp (AD)$.

- $AB = 6,25$; $AC = 5$; $BC = 3,75$; $AD = 3,2$.
- $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$ tels que $AM = 4$ et $AN = 5$.

La figure n'est pas en vraie grandeur.



1. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle. Vous préciserez en quel point.
   b) En déduire que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
2. Calculer DE.
3. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Réponse

1. a) Dans le triangle ABC, le plus grand côté est ... et :
   - D'une part, $(\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2 = \ \dots$
   - D'autre part, $(\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2 = \ \dots$

   Je constate que $AC^2 + BC^2\ \dots\ AB^2$.

   Donc, d'après ...
   le triangle ABC est ...

   b) Le triangle ABC est rectangle en ... donc $(BC) \dots (AC)$.
   On sait également que $(DE) \dots (AC)$.
   Réalisons un chaînon déductif.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$(BC) \dots (AC)$ $(DE) \dots (AC)$	...	...

2. Résumons :
   - Les droites (CD) et (BE) sont sécantes en ...
   - Les droites (BC) et (DE) sont ...

Dans cette situation, on peut donc appliquer ...

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{DE}{\dots}$$

Donc $\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{DE}{\dots}$.

$\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{DE}{\dots}$

$DE = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$

En conclusion, $DE = \dots$

3. Par construction, les droites (BN) et (CM) sont sécantes en ...

   Comparons $\dfrac{AC}{AM}$ et $\dfrac{AB}{AN}$.

   - D'une part, $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$
   - D'autre part, $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

   Nous constatons que $\dfrac{AC}{AM} \dots \dfrac{AB}{AN}$.

   Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont ...