CHAPITRE 15

PUISSANCES

1 Puissances positives

Définition 55 (puissance positive d'un nombre relatif)

Soient a un nombre relatif et n un entier positif.
Le produit de n facteurs tous égaux à a est noté a^n :

$$a^n = \underbrace{a \times a ... \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».
a^2 se lit « a au carré ».
a^3 se lit « a au cube ».
n est l'**exposant** et a^n est une **puissance** de a.

Notation

On remarque que : $a^1 = a$.

Exemple

Calculer chaque expression.

a. 17^1.
b. 2^4.
c. $(-3)^2$.
d. $-(3)^2$.

Réponse

a. $17^1 = \ldots$
b. $2^4 = \ldots$
c. $(-3)^2 = \ldots$
d. $-(3)^2 = \ldots$

Veillez à ne pas confondre ces deux situations !
Étudiez bien la différence entre $(-3)^2$ et $-(3)^2$.

Remarque

Les puissances d'exposant pair d'un nombre négatif sont toujours positives.
En pratique, il n'est pas utile d'énoncer une nouvelle règle pour les puissances d'exposant impair d'un nombre négatif : le signe du produit est déterminée par la règle des signes d'un produit.

Exemple

Déterminer le signe des expressions suivantes.

a. $(-15)^8$.

b. $(-37)^9$.

c. $(+11)^{23}$.

Réponse

a. $(-15)^8 = (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15)$
Ce produit comporte un nombre ... de facteurs négatifs. Il est donc ...

b. $(-37)^9 = (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37)$
Ce produit comporte un nombre ... de facteurs négatifs. Il est donc ...

c. L'expression $(+11)^{23}$ ne comporte aucun facteur négatif : elle est donc ...

2 Puissances négatives

Définition 56 (puissance négative d'un nombre relatif)

Soient a un nombre relatif avec $a \neq 0$ et n un entier positif.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a ... \times a}_{n \text{ facteurs}}} \qquad (\text{pour } a \neq 0).$$

Propriété 55 (puissance négative, inverse d'un nombre)

Soient a est un nombre relatif et n un entier positif.
Le nombre a^{-1} est l'inverse de a.
Le nombre a^{-n} est l'inverse de a^n.

Exemple

Écrire les expressions suivantes sous forme de puissance d'un nombre premier.

a. $\dfrac{1}{17}$. b. $\dfrac{1}{5^3}$. c. $\dfrac{1}{2\times 2\times 2}$. d. $\dfrac{-1}{9}$.

Réponse

a. $\dfrac{1}{17} = \ \ldots$

b. $\dfrac{1}{5^3} = \ \ldots$

c. $\dfrac{1}{2\times 2\times 2} = \ \ldots$

d. $\dfrac{-1}{9} = \ \ldots$

3 Puissances de 10

Propriété 56 (puissances de 10)

Soit n un nombre entier.

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots0000}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \underbrace{0,000\ldots0000}_{n \text{ zéros}}1.$$

10^n s'écrit avec un « 1 » suivi de n zéros.

10^{-n} s'écrit « $0,00\ldots01$ », avec donc n zéros en comptant celui qui précède la virgule.

Exemple

Écrire sous forme d'une puissance de 10 les nombres suivants.

a. 100. b. 100 000 000 000. c. 0,000 1.

Réponse

a. Le nombre 100 comporte un « 1 » suivi de deux « 0 ».
Donc $100 = \ \ldots.$

b. Le nombre 100 000 000 000 comporte un « 1 » suivi de onze « 0 ».
Donc $100\,000\,000\,000 = \ \ldots$

c. Le nombre en écriture décimale 0,000 1 comporte un « 1 » précédé de quatre « 0 », en comptant celui qui précède la virgule.
donc $0,0001 = \ \ldots$

4 Calculer avec les puissances

Il est parfois possible de simplifier les calculs avec les puissances.

Propriété 57 (addition des puissances)
On peut écrire le produit de deux puissances sous la forme d'une puissance :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}.$$

$10^{3} \times 10^{2} = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{3 facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10}_{\text{2 facteurs}} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{3+2=5 facteurs}} = 10^{5}.$

Exemples
Calculer les expressions suivantes.

a. $3^2 \times 3^4$.

b. $10^{30} \times 10^{10}$.

c. $10^5 \times 10^4 \times 10^2$.

d. $7^2 \times 7^5 \times 7^2 \times 7^4$.

Réponse

a. $3^2 \times 3^4 = 3^{\cdots + \cdots} = 3^{\cdots}$

b. $10^{30} \times 10^{10} = 10^{\cdots + \cdots} = 10^{\cdots}$

c. $10^5 \times 10^4 \times 10^2 = 10^{\cdots + \cdots} \times 10^2 = 10^{\cdots + \cdots + \cdots} = 10^{\cdots}$

d. $7^2 \times 7^5 \times 7^2 \times 7^4 = 7^{\cdots + \cdots + \cdots + \cdots} = 7^{\cdots}$.

Propriété 58 (soustraction de puissances)
On peut écrire le quotient de deux puissances sous la forme d'une puissance :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}.$$

$\frac{10^{5}}{10^{2}} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times \cancel{10} \times \cancel{10}}{\cancel{10} \times \cancel{10}} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 10^{5-2}.$

Exemple
Calculer les expressions suivantes.

a. $5^6 \times 5^{-3}$.

b. $\dfrac{3^7}{3^5}$.

c. $\dfrac{10^2}{10^4}$.

d. $100\,000\,000\,000\,000 \times 0{,}000\,001$.

Réponse

a. $5^6 \times 5^{-3} = 5^{\cdots - \cdots} = 5^{\cdots}$

b. $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^7 \times 3^{\cdots} = 3^{\cdots - \cdots} = 3^{\cdots}$

c. $\dfrac{10^2}{10^4} = 10^{\cdots - \cdots} = 10^{\cdots}$

d. $100\,000\,000\,000\,000 \times 0{,}000\,001 = 10^{\cdots} \times 10^{\cdots} = 10^{\cdots - \cdots} = 10^{\cdots}$

Propriété 59 (a puissance zéro)
Soit a un nombre non-nul. Par convention :

$$a^0 = 1.$$

Remarque
En essayant de calculer $\dfrac{a^n}{a^n}$ de deux façons différentes, nous devrions trouver le même résultat.

- Premier calcul : sachant que le quotient d'un nombre non-nul par lui-même est toujours égal à 1, on a immédiatement :
$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$
- Second calcul : en utilisant la propriété de soustraction des puissances, on obtient :
$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

On comparant ces deux égalités des puissances, on constate que la convention s'applique :

$$a^0 = 1.$$

Il faudra attendre le cours de mathématiques de terminale pour démontrer rigoureusement cette propriété, dans un cadre plus large.

Propriété 60 (puissances identiques de deux nombres relatifs)
Soient a un nombre non-nul et n un nombre entier.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n.$$

$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6$.

Exemple
Écrire l'expression suivante sous la forme x^n en détaillant vos calculs.

a. $2^4 \times 7^4$.

Réponse

a. $2^4 \times 7^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
$= (2 \times 7) \times (2 \times 7) \times (2 \times 7) \times (2 \times 7)$
$= (\ \dots\ \times\ \dots\ )^{\cdots}$
$= (\ \dots\ )^{\cdots}$

Propriété 61 (puissances de puissances)

$$(a^n)^p = a^{n \times p}.$$

$(10^4)^3 = 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10^{4+4+4} = 10^{12} = 10^{4\times3}$.

Exemple
Écrire les expressions suivantes sous la forme de puissances de 10.

a. $(10^2)^5$.　　b. $(10^{10})^{10}$.　　c. $(\frac{1}{10^3})^7$.　　d. $(10^{-6})^2$.

Réponse

a. $(10^2)^5 = 10^{\cdots \times \cdots} = 10^{\cdots}$

b. $(10^{10})^{10} = 10^{\cdots \times \cdots} = 10^{\cdots}$

c. $(\frac{1}{10^3})^7 = (10^{\cdots})^{\cdots} = 10^{(\ \cdots\ )\times \cdots} = 10^{\cdots}$

d. $(10^{-6})^2 = 10^{(\ \cdots\ )\times \cdots} = 10^{\cdots}$

Propriété 62 (Priorité opératoires)
Dans le calcul d'une expression, on effectue dans cet ordre :

- les calculs entre parenthèses ;
- les puissances ;
- les multiplications et les divisions ;
- les additions et les soustractions.

Exemple
Calculer les expressions suivantes.

A= $(2-6)\times 3^2+5$.

B= $10^5+10^6\times 10^{-3}+10^5\times 10^{-7}$.

Réponse

$$
\begin{aligned}
\text{A}= {} & (2-6)\times 3^2+5 \\
= {} & \ldots \\
= {} & \ldots \\
= {} & \ldots = \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{B}= {} & 10^5+10^6\times 10^{-3}+10^5\times 10^{-7} \\
= {} & \ldots \\
= {} & \ldots \\
= {} & \ldots \\
= {} & \ldots
\end{aligned}
$$

5 La notation scientifique

Définition 57 (Notation scientifique)
Il existe une manière unique d'écrire d'un nombre décimal positif sous la forme :

$$a\times 10^n.$$

- a est un nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule ($1\leq a<10$).
- n est un entier relatif.

Cette écriture est appelée **notation scientifique** ou **écriture scientifique**.

Exemple

Calculer les expressions suivantes.

A= $370\,000$.

B= $42\,310$.

C= $5,78$.

D= $0,18$.

E= $0,01$.

F= $1\,000\,000\,000\,000$.

G= $0{,}000\,000\,001$.

H= $-38,2$.

Réponse Calculer les expressions suivantes.

A= $370\,000 = \ \ldots$

B= $42\,310 = \ \ldots$

C= $5,78 = \ \ldots$

D= $0,18 = \ \ldots$

E= $0,01 = \ \ldots$

F= $1\,000\,000\,000\,000 = \ \ldots$

G= $0{,}000\,000\,001 = \ \ldots$

H= $-38,2 = \ \ldots$

6 Ordre de grandeur

Définition 58 (Ordre de grandeur)

Si $a \times 10^n$ est l'écriture scientifique d'un nombre, alors 10^n est un **ordre de grandeur** de ce nombre.

Exemple

– Le nombre 10^5 est un ordre de grandeur de $3,7 \times 10^5$.

7 Préfixes

En classe de quatrième, vous devez connaître les préfixes suivants.

	exposants > 1					exposants < 1				
Préfixe	giga	méga	kilo	hecto	deca	deci	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	K	h	da	d	c	m	μ	n
Puissance	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}