CHAPITRE 16

PROBABILITÉS

1 Notion d'expérience aléatoire

Définition 59 (expérience aléatoire, issue)
Une **expérience aléatoire** est une expérience telle que :

- on peut la décrire par un protocole ;
- on peut la répéter dans les mêmes conditions ;
- on peut déterminer à l'avance la liste des issues (ou résultats) ;
- on ne peut pas prévoir quelle sera l'issue de l'expérience au moment où on la réalise.

Un résultat "élémentaire" d'une expérience aléatoire est appelé **issue**.

Exemple
Deux élèves, Adèle et Bastien, simulent avec un tableur le jeu de « pile ou face ». Ils jouent chacun 25 parties dont les résultats sont rapportés dans le tableau suivant :

Elève	Résultats
Adèle	PFFFPPFPPFPPPFFPFFPFPFFPPPFPPPFFPFPFFFPPPPFFPPPFPP
Bastien	PPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPPFPP

Pendant ce temps, Camille joue à un jeu dont chaque partie consiste à lancer un dé ; la partie est gagnée si le résultat est le chiffre 1, un multiple de 2, de 3 ou de 5.

1. L'expérience d'Adèle vous parait-elle aléatoire ?
2. Celle de Bastien ?
3. Celle de Camille ?

Réponse

1. Considérons le jeu d'Adèle. Un lancer de pièce présente-t-il les caractéristiques d'une expérience aléatoire ?
   - Il peut être décrit, sommairement, par un protocole : simulation à l'aide d'un tableur.
   - On peut effectivement le répéter dans les mêmes conditions.
   - On peut déterminer à l'avance la liste des issues, au nombre de deux : « pile » et « face ».
   - La succession des 25 résultats ne montre ni répétition, ni ordre. Il semble impossible de déterminer à l'avance le résultat d'une partie.

   Il semble donc bien que le jeu d'Adèle constitue ...
2. En examinant les résultats obtenus par Bastien, on observe la répétition du groupe « PPF ».

   Il semble donc possible de prédire un résultat.

   Par exemple, « face » est obtenu une fois sur trois et toujours suivi de deux « pile ».

   Bastien ...
3. Il s'avère que, dans le jeu de Camille, on gagne avec un 1, un 2, un 3, et un 4 (multiple de 2), un 5 et un 6 (multiple de 2 et de 3).

   Le résultat peut donc être prédit : ...

   Le jeu de Camille ...

Remarque

Considérons le bloc Scratch suivant.

nombre aléatoire entre (1) et (6)

Ce bloc génère un nombre entier « au hasard » entre 1 et 6, dans la limite des possibilités de l'ordinateur, et l'exécution du bloc peut être considérée comme une expérience aléatoire dont les issues sont « 1 », « 2 », « 3 », « 4 », « 5 » et « 6 ».

Définition 60 (événement)

Un **événement** est associé à un ensemble d'issues. On dit que ces issues réalisent l'événement.

- un **événement élémentaire** est réalisé par une seule issue ;
- un **événement impossible** n'est réalisé par aucune issue ;
- un **événement certain** est réalisé par toutes les issues.

Exemple

Lançons un dé cubique.
Compléter le tableau suivant.
Préciser les événements élémentaires, certains ou impossibles.

Événement	Définition	Issues réalisant l'événement
A	Obtenir un nombre pair	...
B	Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5	...
C	Obtenir le nombre 2	...
D	Obtenir le nombre 13	...
E	Obtenir un nombre inférieur à 8	...

On remarque trois événements particuliers.

- C est un événement ...
- E est un événement ...
- D est un événement ...

Exemple

On place dans un sac 5 jetons représentant chacun l'une des lettres du mot « maths » et l'on tire au hasard une lettre du sac.
Compléter les phrases suivantes.

- Les issues possibles sont ...
- L'événement « tirer une consonne » est réalisé par les issues ...
- L'événement « tirer une voyelle » est réalisé par ...
- L'événement « tirer un x » ...
- L'événement « tirer une lettre autre que z » est réalisé par ...

2 Fréquence et probabilité

Exemple

1. **Répéter plusieurs fois une expérience aléatoire**

```
mettre (N) à (5)
répéter (N) fois
    dire (nombre aléatoire entre (0) et (1)) pendant (2) secondes
```

Considérons le script Scratch suivant :

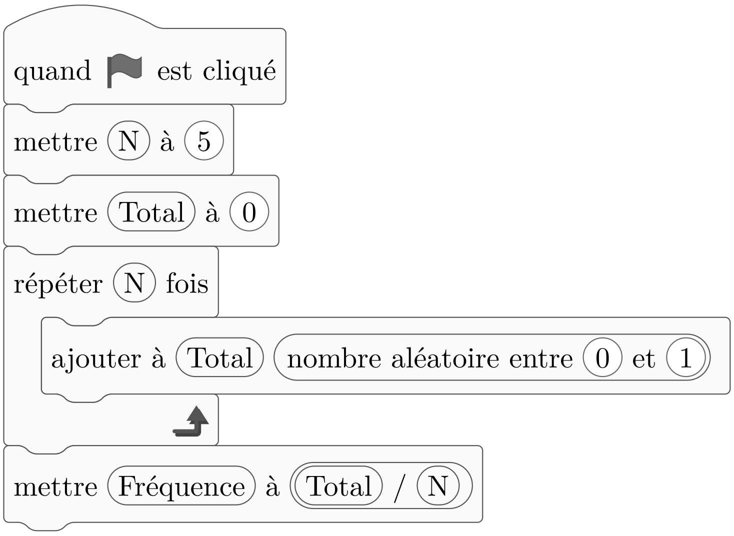
a) Quelles sont les variables dans ce script Scratch ?

b) Quelles sont ses issues possibles de l'expérience aléatoire modélisée ?

c) Combien de fois cette expérience est-elle répété ?

2. **Calculer une fréquence**

Modifions notre script de façon à calculer la fréquence de l'issue « 1 ».



a) Que représente la valeur de la variable $Total$ à la fin de l'exécution du programme ?

b) Même question pour la variable *Fréquence*.

3. **Calculer une fréquence en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois**

Programmer le script précédant. Exécuter-le plusieurs fois, en modifiant à chaque fois la valeur de N de façon à compléter le tableau suivant.

N	Fréquence
10	
50	
100	
1 000	
10 000	
100 000	
1 000 000	

Interpréter les résultats obtenus et proposer une définition de la probabilité d'une issue, dans le cadre d'une expérience aléatoire.

Réponse

1. a) Les variables sont ...

b) Les issues possibles sont ...

Cette situation peut représenter un lancer de pièce où, par exemple :

- 0 est associé à « pile » ;
- 1 est associé à « face ».

c) L'expérience est répétée N fois. au moment où on exécute la boucle, la valeur de N est ...

L'expérience est donc répétée (et simulée) ...

2. a) La variable $Total$ représente, à la fin de l'exécution du programme, ...

   b) La variable *Fréquence* représente, à la fin de l'exécution du programme, ...

3. On obtient les valeurs suivantes.

N	Fréquence
10	0,7
50	0,44
100	0,47
1 000	0,505
10 000	0,496 9
1 000 000	0,500 213
10 000 000	0,499 998

4. En observant l'évolution de la fréquence lorsque N augmente, nous remarquons que plus le nombre d'essais N est grand, plus ...

   Empiriquement, on s'attend à ce que l'issue « 1 » apparaisse une fois sur 2, donc avec une fréquence de ...

En observant l'évolution de la fréquence lorsque N augmente, nous pouvons conjecturer la propriété suivante et proposer une définition du terme *probabilité*.

Propriété 63 (probabilité, fréquence d'apparition)

Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue s'approche d'un nombre.
Ce nombre est appelé la **probabilité** de cette issue.

3 Calculs de probabilité

Propriété 64 (probabilité d'un événement certain, d'un événement impossible)

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
La probabilité d'un événement certain est égal à 1.
La probabilité d'un événement impossible est égal à 0.

Propriété 65 (somme des probabilités de toutes les issues)
La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple
On considère une urne contenant des boules vertes, rouges et blanches.
Un tiers des boules sont vertes, la moitié des boules sont rouges et les autres sont blanches.
On tire au hasard une boule et on s'intéresse aux probabilités p_V, p_R et p_B qu'une boule soit verte, rouge ou blanche.

Un tiers des boules sont vertes donc $p_V = \frac{\dots}{\dots}$.

La moitié des boules sont rouges donc $p_R = \frac{\dots}{\dots}$.

La somme des probabilité de toutes les issues est égale à 1 donc :

$$\dots + \dots + \dots = 1$$

Puisque p_V et p_R sont connues, nous sommes en présence d'une d'équation du premier degré d'inconnue p_B.

Résolvons-là :
$\dots + \dots + p_B = 1$
$\frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + p_B = 1$
$p_B = 1 - \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots}$
$p_B = \frac{6}{6} - \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} - \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots}$
$p_B = \frac{\dots - \dots - \dots}{\dots}$
$p_B = \frac{\dots}{\dots}$.
La probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\frac{\dots}{\dots}$.

4 Équiprobabilité

Définition 61 (expérience aléatoire équiprobable)
Une expérience aléatoire est **équiprobable** lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité de se réaliser.

Propriété 66 (probabilité d'une issue dans une expérience aléatoire équiprobable)
Si une expérience aléatoire équiprobable comporte n issues, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$.

Définition 62 (dé équilibré)
Un dé à n faces est dit **équilibré** si la probabilité d'obtenir chacune des n valeurs est égale à $\frac{1}{n}$.

Exemple
Considérons un dé à six faces équilibré et notons le nombre visible sur sa face supérieure.
L'expérience comporte $n = 6$ issues qui sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Puisque le dé n'est pas truqué, il y a exactement autant de « chance » d'obtenir un 3 ou un 6 (par exemple).
L'expérience est bien équiprobable et la probabilité de chaque issue est :

$$p = \frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots}.$$

Propriété 67 (probabilité d'un événement, équiprobabilité)
Dans une expérience aléatoire équiprobable, la probabilité p d'un événement A est égale à :

$$p = \frac{\text{Nombre d'issues qui réalisent cet événement}}{\text{Nombre total d'issues}}.$$

5 Événements incompatibles

Définition 63 (événements incompatibles)
Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont **incompatibles**.

Exemple
On lance un dé à six faces et on définit les événements :
A : « obtenir un 2 ».
B : « obtenir un nombre supérieur à 3 ».
Les événements A et B ne peuvent donc pas se réaliser en même temps. Ils sont donc ...

6 Événements contraires

Définition 64 (événements contraires)
Soit A un événement.
L'èvénement contraire de A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Exemple

On lance un dé à six faces. Compléter le tableau suivant.

Événement	Événement contraire
Obtenir un 2	...
Obtenir un nombre strictement supérieur à 4	...
Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3	...

Propriété 68 (probabilité d'un événement contraire)
La somme de la probabilité d'un événement et de l'événement contraire est égale à 1.

7 Exercices et problèmes

Exemple

D'après un sujet de brevet (Amérique du Sud).
Un sac contient 6 jetons rouges et 2 jetons jaunes. On tire au hasard, chacun des jetons ayant la même probabilité d'être tiré, un jeton.

1. Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge.
2. Calculer la probabilité de tirer un jeton jaune.
3. On ajoute dans ce sac des jetons verts. Le sac contient alors 6 jetons rouges, 2 jetons jaunes et les jetons verts.

   On tire un jeton au hasard.

   Sachant que la probabilité de tirer un jeton vert est égale à $\frac{1}{2}$, calculer le nombre de jetons verts.

Réponse

1. Le nombre total de jetons est $\ldots + \ldots$ soit ...

   Il y a ... jetons dans le sac, donc ... issues possibles.

   Le sac contient ... jetons rouges.

   Donc, il y a ... issues « favorables », qui permettent à l'événement R « tirer un jeton rouge » de se réaliser.

   Calculons la probabilité $p(R)$ de l'événement « tirer un jeton rouge ».

   $$p(R) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre total de jetons}} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

2. Dans cet exercice, un jeton est soit jaune, soit rouge.

   L'événement J « tirer un jeton jaune » est donc l'événement contraire de l'événement « tirer un jeton rouge ».

   $p(J) + p(R) = 1$

   $p(J) = 1 - \ \dots \ = 1 - \ \dots \ = \ \dots$

3. La probabilité de tirer un jeton vert est $\dfrac{\dots}{\dots}$.

   Cela signifie que la moitié des jetons sont verts, et l'autre moitié des jetons ne sont pas verts.

   Il y a ... jetons qui ne sont pas verts (jaunes ou rouges).

   Il y a donc ... jetons verts.

Exemple

D'après un sujet de brevet, Centres Étrangers 2, juin 2009

Pierre a lancé un dé cubique (non truqué). Il a obtenu 6. Il lance ce dé une seconde fois.
Quelle est la probabilité d'obtenir 6 au second lancer ?

Réponse

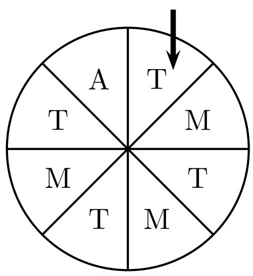
Il n'y aucun lien entre le premier lancer et le second lancer.
En particulier, le résultat du second lancer ne dépend en aucune façon du résultat du premier.
La probabilité d'obtenir un 6 au second lancer est $\dfrac{\dots}{\dots.}$

Exemple

D'après un sujet de brevet, Polynésie, juin 2009

À un stand du « Heiva », on fait tourner la roue de loterie ci-dessous.
On admet que chaque secteur a autant de chance d'être désigné.
On regarde la lettre désignée par la flèche : A, T ou M, et on considère les événements suivants :

- A : « on gagne un autocollant » ;
- T : « on gagne un tee-shirt » ;
- M : « on gagne un tour de manège ».



1. Quelle est la probabilité de l'événement A ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement T ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement M ?
4. Exprimer à l'aide d'une phrase ce qu'est l'événement « non A » puis donner sa probabilité.

Réponse

1. Sur les 8 secteurs, ... comporte un A.
   $$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de secteurs « } A \text{ »}}{\text{nombre total de secteurs}} = \frac{\dots}{\dots}.$$
2. Sur les 8 secteurs, ... comportent un T.
   $$p(T) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de secteurs « } T \text{ »}}{\text{nombre total de secteurs}} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}.$$
3. Sur les 8 secteurs, ... comportent un M.
   $$p(M) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de secteurs « } M \text{ »}}{\text{nombre total de secteurs}} = \frac{\dots}{\dots}.$$
4. « non A » représente l'événement « on ne gagne pas d'autocollant ».
   $p(non\ A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$.
   La probabilité de l'événement « non A » est $\frac{\dots}{\dots}$.

Exemple

D'après un sujet de brevet, Nouvelle Calédonie, décembre 2009

Dans une urne, on a dix boules indiscernables au toucher portant les lettres du mot ROUSSETTES.

R O U S S E T T E S

On tire au hasard une boule dans cette urne et on regarde la lettre inscrite sur la boule.

1. Quels sont les six résultats possibles d'un tirage ?
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a) la lettre tirée est un R.
   b) la lettre tirée est un S.
   c) la lettre tirée n'est pas un S.
3. Julie affirme qu'elle a plus de chance d'obtenir une voyelle qu'une consonne à l'issue d'un tirage. A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

Réponse

1. La lettre tirée peut être un ... , un ... , un ... , un ... , un ... ou un ...
   Ce tirage de lettre constitue une expérience aléatoire qui possède ... issues différentes.
2. a) Sur les 10 boules dans l'urne, ... porte un « R ».
   Appelons R l'événement « tirer un R ».
   $$p(R) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de « } R \text{ »}}{\text{nombre total de lettres}} = \frac{\dots}{\dots}.$$
   La probabilité de tirer un « R » est $= \frac{\dots}{\dots}$.

b) Sur les 10 boules dans l'urne, ... portent un « S ».

$p(S) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{\text{nombre de « } S \text{ »}}{\text{nombre total de lettres}} = \dfrac{\dots}{\dots}$.

La probabilité de tirer un « S » est $\dfrac{\dots}{\dots}$.

3. « Ne pas tirer de S » est l'événement contraire de « tirer un S ».

   $p(S) + p(non\ S) = \dots$

   $p(non\ S) = 1 - \dots = 1 - \dots = \dots$

   La probabilité de tirer une lettre qui n'est pas un S est ...

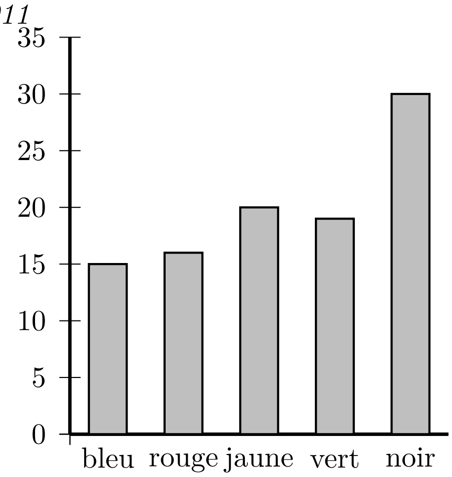
4. L'urne contient :
   - ... jetons représentant une voyelle ;
   - ... jetons représentant une consonne.

   Julie a donc ...

Exemple

D'après un sujet de brevet, Métropole La réunion, 23 juin 2011

Un dé cubique a 6 faces peintes : une en bleu, une en rouge, une en jaune, une en vert et deux en noir.



1. On jette ce dé cent fois et on note à chaque fois la couleur de la face obtenue. Le schéma ci-contre donne la répartition des couleurs obtenues lors de ces cent lancers.
   a) Déterminer la fréquence d'apparition de la couleur jaune.
   b) Déterminer la fréquence d'apparition de la couleur noire.
2. On suppose que le dé est équilibré.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir la couleur jaune ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir la couleur noire ?
3. Expliquer l'écart entre les fréquences obtenues à la question 1 et les probabilités trouvées à la question 2.

Réponse

1. Par lecture graphique :
   a) Fréquence d'apparition de la couleur jaune : $\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$;
   b) Fréquence d'apparition de la couleur noire : $\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$.

2. On suppose que le dé est équilibré.

   L'expérience aléatoire est donc équiprobable.

   Appelons J l'événement « obtenir la couleur jaune » et N l'événement « obtenir la couleur noire ».

   a) $p(J) = \dfrac{\ldots}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$;

   b) Dans une expérience équiprobable, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité.

      $p(N) = p(\ \ldots\ ) = \dfrac{\ldots}{\ldots}$.

3. Plus le nombre de lancers est grand, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité théorique mais :

   – en pratique, la fréquence peut très bien différer de ...

   – plus le nombre de lancers est faible, plus l'écart entre fréquence observée et probabilité théorique peut être ...

Exemple

D'après un sujet de brevet, Polynésie, juin 2014

On place des boules toutes indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque boule colorée est inscrite une lettre. Le tableau suivant présente la répartition des boules.

Lettre	Rouge	Vert	Bleu
A	3	5	2
B	2	2	6

1. Combien y a-t-il de boules dans le sac ?

2. On tire une boule au hasard, on note sa couleur et sa lettre.

   a) Vérifier qu'il y a une chance sur dix de tirer une boule bleue portant la lettre A.

   b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

   c) A-t-on autant de chance de tirer une boule portant la lettre A que de tirer une boule portant la lettre B ?

Réponse

1. $\ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$

   Le sac contient ... boules.

2. a) Le sac contient 2 boules bleues portant la lettre A.

      Appelons A_2 l'événement « tirer une boule bleue portant la nombre 2 ».

      $p(A_2) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

      Il y a bien une chance sur ... de tirer une boule bleue portant la lettre A.

b) Le sac contient ... + ... soit ... boules rouges.

Appelons R l'événement « tirer une boule rouge ».

$p(R) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

La probabilité de tirer une boule rouge est ...

c) Nombre de boules portant la lettre A : $\dots + \dots + \dots = \dots$

Nombre de boules portant la lettre B : $\dots + \dots + \dots = \dots$

On a donc ... de chance de tirer une boule portant la lettre A que de tirer une boule portant la lettre B.