CHAPITRE 17

TRANSFORMATIONS GÉOMÈTRIQUES

1 Agrandissement et réduction

Définition 65 (agrandissement et réduction d'une figure, rapport de réduction)
Soit une figure $\mathcal{F}$ et une figure $\mathcal{F}'$:

- de même forme que $\mathcal{F}$;
- dont les longueurs sont obtenues en multipliant par un nombre k strictement positif les longueurs de côtés de $\mathcal{F}$.

On dit que :

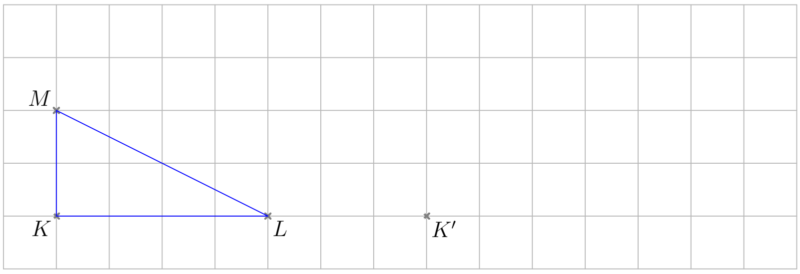
- la figure $\mathcal{F}'$ est un **agrandissement** de $\mathcal{F}$ si $k > 1$,
  le nombre k est alors appelé le **rapport d'agrandissement** ;
- la figure $\mathcal{F}'$ est une **réduction** de $\mathcal{F}$ si $k < 1$;
  le nombre k est alors appelé le **rapport de réduction**.

Exemple
Sur un quadrillage :

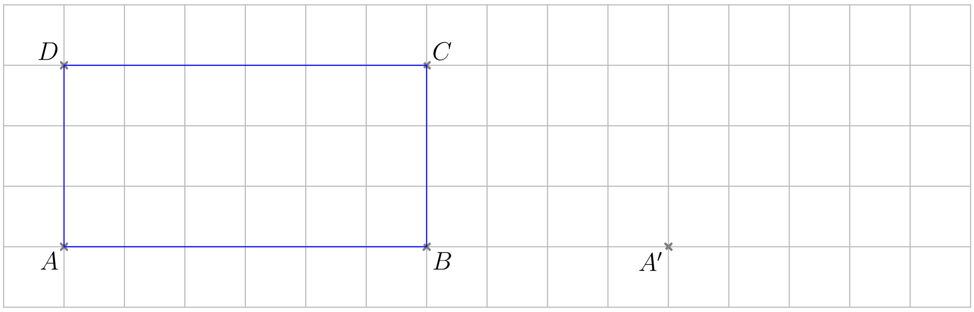
1. Tracer un triangle KLM rectangle en K tel que $KL = 4$ carreaux et $KM = 2$ carreaux.
   Tracer le triangle $K'L'M'$, agrandissement de rapport 1,5 du triangle KLM.
2. Tracer un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ carreaux et $AD = 3$ carreaux.
   Tracer le rectangle $A'B'C'D'$, réduction de rapport $\frac{2}{3}$ du rectangle $ABCD$.

Réponse

1. Voici le tracé du triangle LKM et de son agrandissement $K'L'M'$.



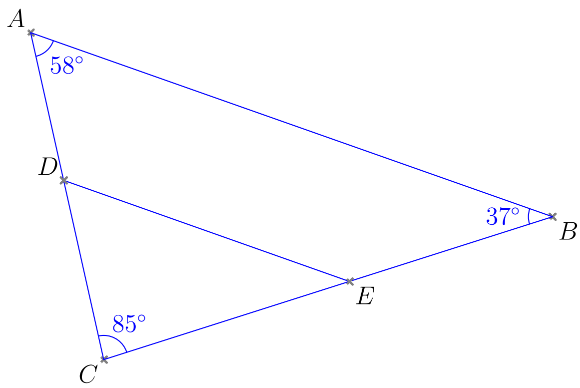
2. Voici le tracé du rectangle $ABCD$ et de sa réduction $A'B'C'D'$.



Propriété 69 (conservation des mesures d'angles par un agrandissement)
Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure, alors ces deux figures ont les mêmes mesures d'angle.
On dit que l'agrandissement (ou la réduction) d'une figure conserve les mesures d'angles.

Exemple

Dans la figure suivante, le triangle CDE est une réduction du triangle CAB.
En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CDE}$ et celle de l'angle $\widehat{CED}$.



Réponse

La réduction conserve les angles donc :

$\widehat{CDE} = \ \ldots \ = \ \ldots$

$\widehat{CED} = \ \ldots \ = \ \ldots$

Propriété 70 (agrandissement - multiplication des aires et des volumes)
Si on agrandit ou réduit une figure d'un rapport k, alors :

- les aires sont multipliées par k^2 ;
- les volumes sont multipliées par k^3.

Exemple
La figure $RSTU$ est un rectangle avec $RS = 7\,\text{cm}$ et $RU = 4\,\text{cm}$.
Le rectangle $R'S'T'U$ est un agrandissement de $RSTU$ de rapport $k = 10$.

1. Calculer l'aire du rectangle $RSTU$.
2. Calculer l'aire du rectangle $R'S'T'U'$ de deux façons différentes.

Réponse

1. $\mathcal{A}_1 = \ \dots\ \times\ \dots\ =\ \dots\ \times\ \dots\ =\ \dots$
   L'aire du rectangle $RSTU$ mesure ...
2. a) $\mathcal{A}_2 = \ \dots\ \times\ \dots\ = (k \times\ \dots\ ) \times (\ \dots\ \times\ \dots\ )$
   $\mathcal{A}_2 = \ \dots\ \times\ \dots\ =\ \dots$
   b) L'aire de la figure $R'S'T'U'$ est égale à l'aire de la figure $RSTU$ multipliée par k^2.
   $\mathcal{A}_2 = k^2 \times\ \dots\ =\ \dots\ \times\ \dots\ =\ \dots$
   L'aire du rectangle $R'S'T'U'$ mesure $\dots$

Exemple
On considère un cube $\mathcal{C}_1$ dont le volume V_1 mesure $8\,\text{cm}^3$.
Le cube $\mathcal{C}_2$ est un agrandissement du cube $\mathcal{C}_1$ de rapport $k = 3$.
Calculer son volume V_2.

Réponse
On multiplie le volume du cube $\mathcal{C}_1$ par k^3.
$k^3 = 3 \times 3 \times 3 = \ \dots$
$V_2 = k^3 \times V_1 = \ \dots\ \times V_1 = \ \dots\ \times\ \dots\ =\ \dots$

Le volume du cube $\mathcal{C}_2$ mesure ...

Exemple
D'après le sujet de brevet de Nouvelle-Calédonie (9 décembre 2019)

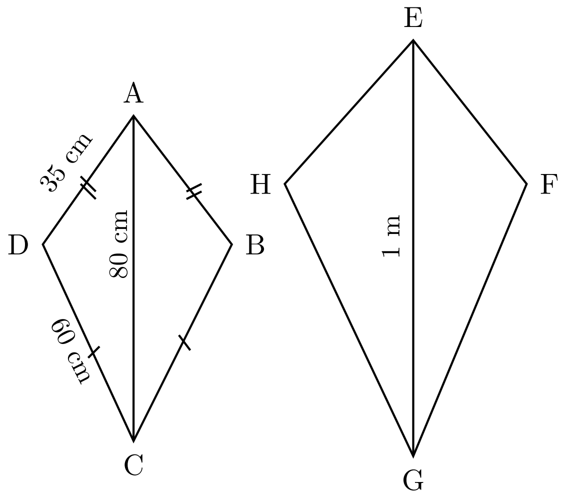
Le quadrilatère $EFGH$ est un agrandissement de $ABCD$.

Le schéma ci-contre n'est pas à l'échelle.
On donne $AC = 80$ cm et $GE = 1$ m.

1. Montrer que le coefficient d'agrandissement est 1,25.
2. Calculer GH et EF.
3. On considère que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $1\,950\,\text{cm}^2$.

   Calculer l'aire de EFGH en cm^2.

   Arrondir à l'unité.



Réponse

1. calculons le coefficient de proportionnalité k qui relie longueur d'origine et longueur agrandie.

   $k = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

   Le coefficient d'agrandissement k est ...

2. Dans un agrandissement, les longueurs sont multipliées par ...

   D'après le codage du schéma, $AB = \dots = \dots$

   $EF = k \times \dots = \dots \times \dots = \dots$

   $GH = k \times \dots = \dots \times \dots = \dots$

3. Dans un agrandissement, les aires sont multipliées par ...

   $\mathcal{A}_{EFGH} = k^2 \times \dots = (\dots)^2 \times \dots = \dots \approx \dots$

   L'aire du quadrilatère $EFGH$ mesure environ ... cm^2, au cm^2 près.

Exemple

D'après le sujet de brevet de Polynésie (1er juillet 2019)
La pyramide du Louvre est une pyramide à base carrée de côté 35,4 m et de hauteur 21,6 m. C'est une réduction de la pyramide de Khéops en Egypte, qui mesure environ 230,5 m de côté.

1. Montrer que la hauteur de la pyramide de Khéops est d'environ 140,6 m.
2. Calculer le volume en m^3 de la pyramide du Louvre (arrondir à l'unité).
3. Par quel nombre peut-on multiplier le volume de la pyramide du Louvre pour obtenir celui de la pyramide de Khéops (arrondir à l'unité) ?

Réponse

1. Déterminons le facteur de réduction : $k = \frac{\dots}{\dots}$
   On peut alors calculer la hauteur H de la pyramide de Khéops.
   $21,6 = k \times H$
   $H = \frac{21,6}{k} = \frac{\dots}{\frac{35,4}{\dots}} = \dots \times \frac{\dots}{\dots} \approx \dots \approx \dots$
   La hauteur de la pyramide de Khéops mesure environ ... (arrondie au dixième).
2. Calculons le volume V de la pyramide du Louvre.
   $V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\dots \times \dots \times \dots 6}{\dots} = \dots \times \dots = \dots \approx \dots$
   Le volume de la pyramide mesure environ ... (arrondi à l'unité).
3. La pyramide de Khéops est $k' = \frac{1}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ fois plus grande que la pyramide du Louvre.
   Son volume V' est donc $(k')^3$ soit environ ... fois plus grand.

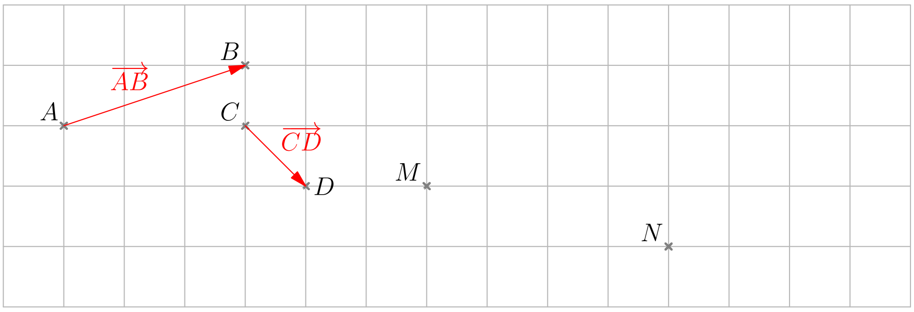
2 Approche de la notion de translation

Définition 66 (translation)
Soient A et B deux points du plan distincts, et M un point quelconque du plan. Pour trouver l'**image** du point M' du point M par la **translation** « de vecteur $\overrightarrow{AB}$ », on fait glisser le point M :

- selon la **direction** de la droite (AB) ;
- dans le **sens** de A vers B ;
- d'une **longueur** égale à AB.

On représente la translation qui transforme A en B par une flèche reliant A et B.

Exemple



Sur la figure ci-dessus, placer les points :

- M', image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- M'', image du point M par la translation $\overrightarrow{CD}$.
- N', image du point N par la translation $\overrightarrow{AB}$.

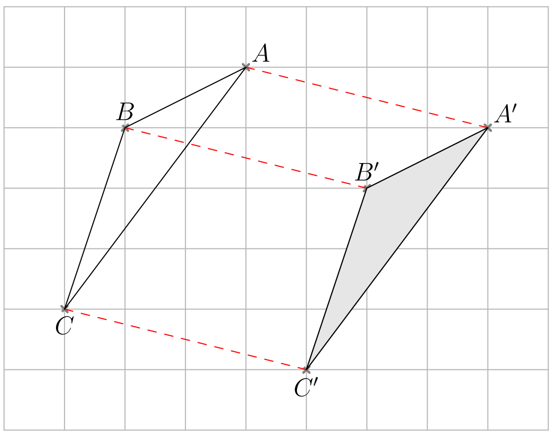
3 Image d'une figure par une translation

Définition 67 (image d'une figure par une translation)
On obtient l'**image** $\mathcal{F}'$ d'une figure $\mathcal{F}$ par la translation « de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ » en la faisant glisser :

- selon la direction de la droite (AA') ;
- dans le sens de A vers A' ;
- d'une longueur égale à AA'.

Exemple

Ci-contre, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

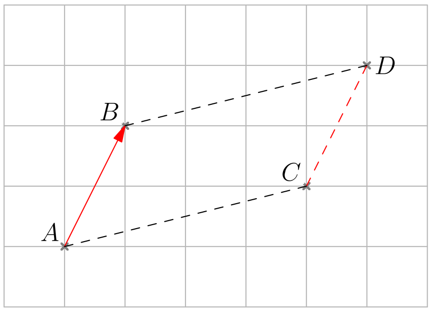


4 Propriétés

Propriété 71 (figures superposables par une translation)
Une figure et son image par une translation sont superposables.

Propriété 72 (conservation des angles, des longueurs et des aires par une translation)
La translation conserve les angles, les longueurs et les aires.

Propriété 73 (de la translation au parallélogramme)
Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si D est l'image de C par la translation qui transforme A en B alors $ABDC$ est un parallélogramme.



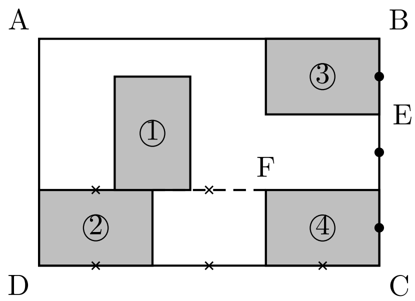
Propriété 74 (du parallélogramme à la translation)
Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si $ABDC$ est un parallélogramme alors D est l'image de C par la translation qui transforme A en B.

Exemple

D'après l'exercice 3 du sujet de brevet « Métropole la Réunion », 1er juillet 2019.
Olivia s'est acheté un tableau pour décorer le mur de son salon.

Ce tableau, représenté ci-contre, est constitué de quatre rectangles identiques nommés ①, ②, ③ et ④ dessinés à l'intérieur d'un grand rectangle $ABCD$ d'aire égale à 1,215 m^2.

Le ratio longueur ÷ largeur est égal à 3÷2 pour chacun des cinq rectangles.



1. Recopier, en les complétant, les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.
   a) Le rectangle ... est l'image du rectangle ... par la translation qui transforme C en E.
   b) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ... par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Quelle est l'aire d'un petit rectangle ?
3. Quelles sont la longueur et la largeur du rectangle $ABCD$?

Réponse

1. a) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ... par la translation qui transforme C en E.
   b) Le rectangle ... est l'image du rectangle ① par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Un petit rectangle est obtenu par une réduction du grand rectangle de rapport $k = \dfrac{\dots}{\dots}$.

   Soit $\mathcal{A}_p$ l'aire du petit rectangle et $\mathcal{A}_G$ l'aire du grand rectangle.

   $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_G \times (\dfrac{\dots}{\dots})^2 = \ \dots \ \times \dfrac{\dots}{\dots} = \ \dots$

   L'aire du petit rectangle mesure ...
3. Soient L la longueur et l la largeur du rectangle $ABCD$.

   Le ratio $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est égal à $\dfrac{\dots}{\dots}$.

   On a donc $L = \dfrac{\dots}{\dots} \times l$, soit $L = \ \dots \ \times l$.

   Comme $l \times L = \ \dots$, on a :

   $l \times (\ \dots l) = \ \dots$

   $\dots \ \times l^2 = \ \dots$

   $l^2 = \dfrac{\dots}{\dots}$

   $l^2 = \ \dots$

   $l = \ \dots$

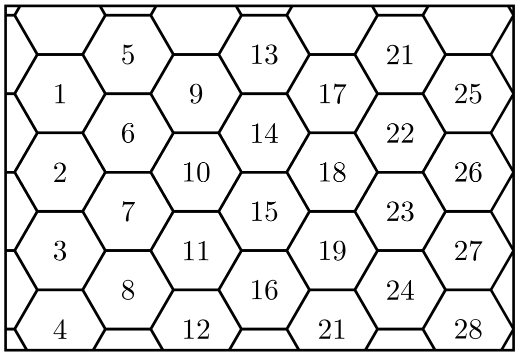
   Par suite $L = 1,5 \times \ \dots \ = \ \dots$

   La longueur du rectangle $ABCD$ mesure ... et sa largeur ...

5 Identifier une translation dans une frise ou un pavage

Exemple

On se place dans le pavage ci-dessous, constitué d'hexagones numérotés.



Compléter les phrases suivantes.

a. Par la translation qui transforme 1 en 2, l'image de 14 est : ....

b. Par la translation qui transforme 1 en 2, l'image de 19 est : ....

c. Par la translation qui transforme 21 en 7, l'image de 26 est : ....

d. Par la translation qui transforme 1 en 8, l'image de 13 est : ....

e. Par la translation qui transforme 22 en 16, l'image de 13 est : ....