CHAPITRE 2

# ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

## 1 Points et droites

**Définition 10 (point)**

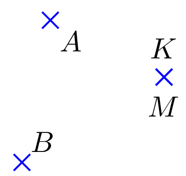
Dans un plan, il y a une infinité de points.
On les nomme à l'aide d'une lettre majuscule.
On représente un **point** par une croix.
Deux points **distincts** sont notés avec des lettres différentes.
Si deux points ne sont pas distincts alors il sont **confondus**.

**Exemple**

Ci-contre, on a placé les points $A$, $B$, $K$ et $M$ :

Les points $A$ et $B$ sont ...

Les points $K$ et $M$ sont ...




**Définition 11 (droite)**

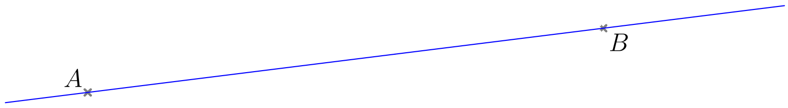
Une **droite** est formée par une infinité de points alignés.

**Remarque**

Une droite est une ligne (droite !) illimitée des deux côtés.
Il est donc impossible de la représenter entièrement.

**Méthode**

Pour tracer une droite passant par les points $A$ et $B$, on relie les points $A$ et $B$ à la règle en prolongeant le trait au-delà des points.

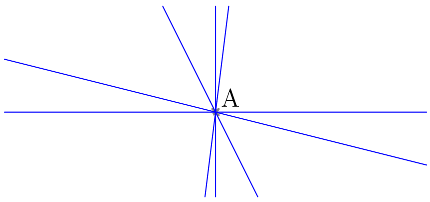



**Propriété 5 (droites passant par un point)**

Par un point, il passe une infinité de droites.

**Exemple**

Ci-dessous, on représente ... droites parmi toutes celles qui passent par le point $A$.




**Définition 12 (axiome)**

Une affirmation est un **axiome** lorsqu'on considère qu'elle est évidente, on ne va pas la démontrer.

**Axiome 1**

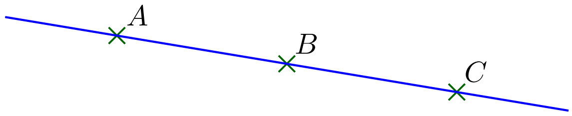
Par deux points distincts $A$ et $B$, il ne passe qu'une seule droite. On la note $(AB)$ ou $(BA)$.

**Définition 13 (points alignés)**

Si trois points (ou plus) appartiennent à une même droite alors ils sont **alignés**.

**Exemple**

La droite ci-dessous passe par les points ...



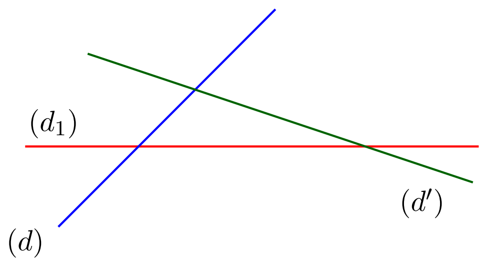

On peut donc la nommer de plusieurs façons : ( ... ), ( ... ), ( ... ), ( ... ), ( ... ) ou ( ... ).
Les trois points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à une même droite, donc ils sont ... .

**Remarque**

On peut donner un nom à une droite même si on n'en connait aucun point.

**Exemple**

On ne connaît aucun point appartenant aux trois droites ci-dessous, mais on peut nommer ces droites à l'aide d'une lettre, suivie d'un chiffre ou d'un signe, par exemple : $(d)$, $(d_1)$ et $(d')$.
$(d')$ se lit « d prime ».



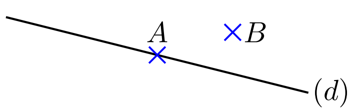

**Définition 14 (notation $\in$)**

Soit $A$ un point qui appartient à une droite $(d)$.
Soit $B$ un point qui n'appartient pas à la droite $(d)$.

On note :

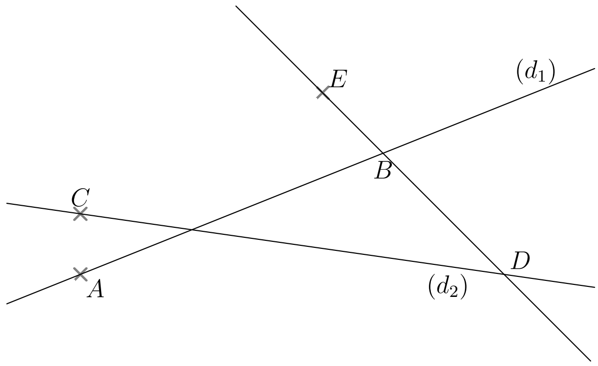
$A \in (d)$.
$B \notin (d)$.

$\in$ signifie « **appartient à** » .
$\notin$ signifie « **n'appartient pas à** ».



**Exemple**

Observer la figure ci-dessous puis compléter avec le symbole « $\in$ » ou avec le symbole « $\notin$ ».




| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $A$ | ... | $(d_1)$ | 3. | $C$ | ... | $(BD)$ | 5. | $E$ | ... | $(d_1)$ |
| 2. | $B$ | ... | $(d_2)$ | 4. | $D$ | ... | $(BE)$ | 6. | $B$ | ... | $(AB)$ |

**Définition 15 (droites distinctes ou confondues)**

Deux droites sont **distinctes** lorsqu'il existe un point qui appartient à une droite mais pas à l'autre. Deux droites qui ne sont pas distinctes sont dites **confondues**.

**Exemple**

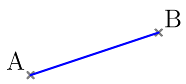
Observer la figure de l'exemple précédent puis compléter les phrases suivantes avec les mots « distincte » ou « confondue ».

1. Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont ...
2. Les droites $(BD)$ et $(BE)$ sont ...
3. Les droites $(d_1)$ et $(AE)$ sont ...
4. Les droites $(d_2)$ et $(CD)$ sont ...

## 2 Segments et codage

**Définition 16 (segment)**

Le **segment** d'**extrémités** $A$ et $B$ est la portion de droite déterminée par deux points $A$ et $B$. Ce segment est noté $[AB]$ ou $[BA]$.



### Remarque

Un segment est limité des deux côtés.

**Définition 17 (longueur d'un segment)**

La **longueur** du segment $[AB]$ est la distance du point $A$ au point $B$.
Elle est notée $AB$.

### Remarques

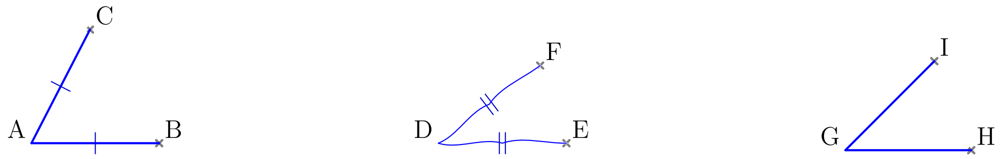
- La longueur du segment $[AB]$ est la longueur du plus court chemin entre les points $A$ et $B$.
- Si deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur, alors $AB = CD$.

**Définition 18 (codage)**

Dans une figure, on **code** les longueurs égales à l'aide d'un même symbole.

### Exemple

Nous allons examiner trois figures.




1. À gauche, le codage nous garantit que les segments ... et ... ont ... .

$$AB \dots AC$$

2. Au centre, la figure est tracée « à main levée », mais là aussi, le codage nous garantit que les segments ... et ... ont ...

$$DE \dots DF$$

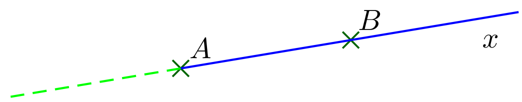
3. À droite, en l'absence de codage sur la figure, il est impossible de garantir que les segments ... et ... ont la même longueur.

## 3 Demi-droite

**Définition 19 (demi-droite)**
Une **demi-droite** est une partie d'une droite limitée d'un côté par un point de cette droite.
Ce point est appelé l'**origine** de la demi-droite.

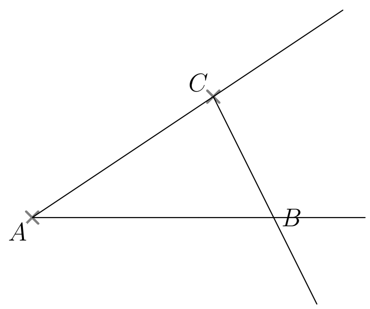
**Notation**
Ci-dessous, la demi-droite représentée en traits pleins peut être notée :

- $[OA)$ , la demi-droite d'origine $O$ passant par $A$ ;
- $[Ox)$ , la demi-droite d'origine $O$ de direction $x$.
  Une direction est indiquée par une lettre minuscule.




**Remarque**
Une demi-droite est limitée d'un côté et illimitée de l'autre.

**Exemple**
Identifier et nommer chaque demi-droite tracée dans la figure suivante.




1. ... 2. ... 3. ...

# 4 Position de deux droites dans le plan

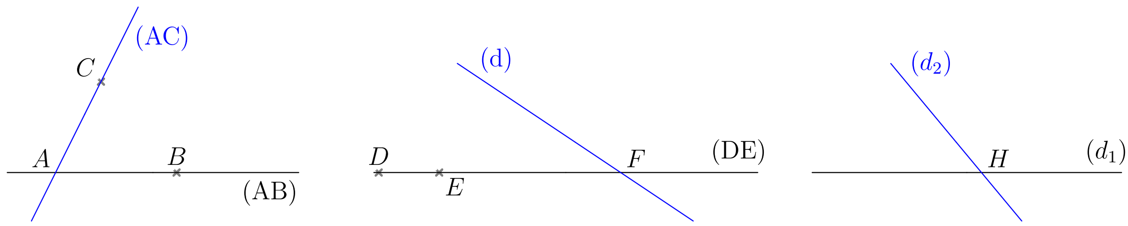
## 4.1 Droites perpendiculaires

**Définition 20 (droites sécantes, point d'intersection)**
Deux droites distinctes qui ont un point commun sont **sécantes**.
Ce point est le **point d'intersection** des deux droites.

**Propriété 6 (droites sécantes)**
Deux droites sécantes possèdent un unique point commun.

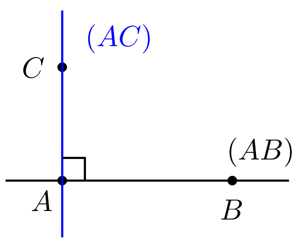
**Exemples**

1. À gauche : ... est le point d'intersection des droites ... et ...
2. Au centre : ... est le point d'intersection des droites ... et ...
3. À droite : ... est le point d'intersection des droites ... et ...

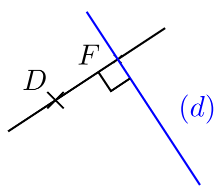



**Définition 21 (droites perpendiculaires)**
Deux droites sécantes qui forment quatre angles droits sont **perpendiculaires**.
Sur une figure, on code deux droites perpendiculaires en plaçant un carré à leur intersection.

**Exemples**




$(AB) \perp \ \dots$




$(DF) \dots ( \dots )$

La droite ... est perpendiculaire à la droite ...

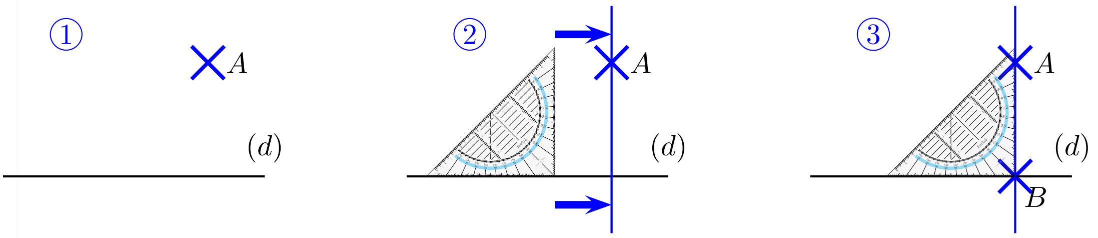
Les droites ... et ... sont perpendiculaires.

**Méthode (construire une droite perpendiculaire à une autre passant par un point)**
Ci-dessous, pour construire la droite passant par $A$ et perpendiculaire à la droite $(d)$, on peut :

(1) – Placer le point $A$ et tracer la droite $(d)$.

(2) – Positionner un côté de l'ange droit de l'équerre le long de la droite (d).
– Faire glisser l'équerre de façon à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par $A$.

(3) – Placer un point $B$ (par exemple) à l'intersection de la droite $(d)$ et du côté perpendiculaire de l'angle droit.
– Tracer la droite $(AB)$.




Par construction, les droites $(d)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.

## 4.2 Droites parallèles

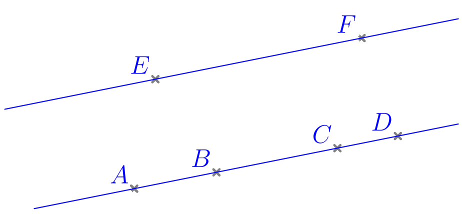
**Définition 22 (droites parallèles)**
Deux droites qui n'ont aucun point commun sont **parallèles**.
La notation $(AB)//(d)$ signifie que la droite $(AB)$ est parallèle à la droite $(d)$.

**Propriété 7 (droites parallèles distinctes ou confondues)**
Deux droites parallèles sont soit distinctes, soit confondues.

**Exemple**

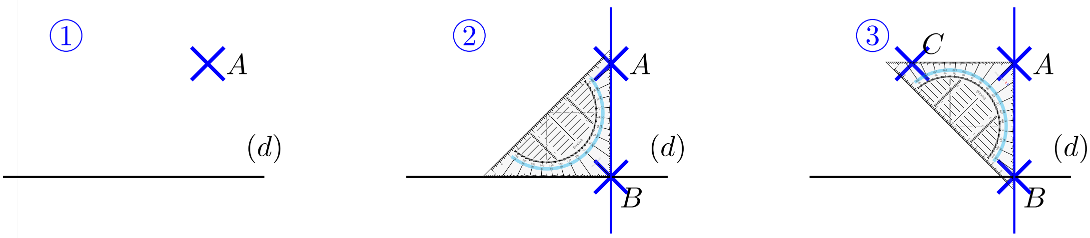
Les droites ( ... ) et ( ... ) sont parallèles et confondues.

Les droites ( ... ) et ( ... ) sont parallèles et distinctes.



**Méthode (construire une droite parallèle à une autre passant par un point)**
Pour construire la droite passant par $A$ et perpendiculaire à la droite $(d)$, on peut :

1. Placer le point $A$ et tracer la droite $(d)$.
2. Tracer la droite $(AB)$ en suivant la méthode "*construire une droite perpendiculaire à une autre passant par un point*".
3. Tracer la droite $(AC)$ de la même façon.




Par construction, les droites $(d)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires.

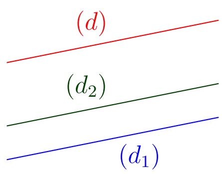
# 5 Propriétés des droites

## 5.1 Si deux droites sont parallèles à une même droite...

**Propriété 8 (Si deux droites sont parallèles à une même droite ...)**
Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

**Exemple**
Les droites $(d_1)$, $(d_2)$ et $(d)$ sont telles que :

- $(d_1)//(d)$.
- $(d_2)//(d)$.




Démontrer que les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont parallèles.

**Réponse**
Nous allons réaliser un chaînon déductif.

| Je sais que : | Propriété : | Conclusion : |
|---|---|---|
| ... // .... .<br>... // .... . | ... | ... // .... . |

Nous avons ainsi démontré que les droites ... et ... sont ...

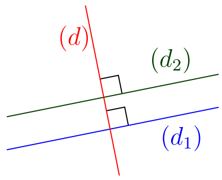
## 5.2 Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite . . .

**Propriété 9 (Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite ...)**
Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

**Exemple**

Cette fois, les droites $(d_1)$, $(d_2)$ et $(d)$ sont telles que :

- $(d_1) \perp (d)$.
- $(d_2) \perp (d)$.




Démontrer que les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont parallèles.

**Réponse**

| Je sais que : | Propriété : | Conclusion : |
|---|---|---|
| $\ldots \perp \ldots .$<br>$\ldots \perp \ldots .$ | ... | $\ldots // \ldots .$ |

Nous savons maintenant que les droites . . . et . . . sont ...

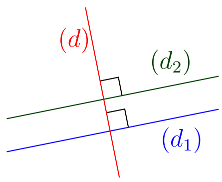
## 5.3 Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une . . .

**Propriété 10 (Si deux droites sont parallèles ...)**
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

**Exemple**

Dans ce troisième exemple, nous savons que :

- $(d_1)//(d_2)$.
- $(d) \perp (d_1)$.




Démontrer que les doites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont perpendiculaires.

**Réponse**

| Je sais que : | Propriété : | Conclusion : |
|---|---|---|
| . . . // . . . .<br>. . . $\perp$ . . . . | ... | . . . $\perp$ . . . |

Cette fois, nous avons démontré que les droites . . . et . . . sont perpendiculaires.

## 6 Notion de grandeur et distances

**Définition 23 (grandeur)**

Une **grandeur** est une caractéristique ou une propriété qui peut être mesurée ou calculée.
Elle s'exprime souvent accompagnée d'une unité de mesure.
On peut connaître d'une grandeur sa **valeur exacte** ou sa **valeur approchée**.

**Notation**

- On utilise le signe $=$ pour une valeur exacte.
- On utilise le signe $\approx$ pour une valeur approchée.

**Exemples**

1. L'exercice 4 page 61 du cahier d'exercices définit un carré dont le côté $c$ mesure 4 cm.

   Je connais donc la valeur exacte du côté, que j'appelle $c$, et je peux écrire $c$ . . . 4 cm.

2. Un site internet indique, qu'en prenant un itinéraire "rapide", notre collège et la Grande Plage de Quiberon sont distants de 893 km.

   C'est une distance $d$ approximative. La distance réelle est peut-être de 893,231 km ou de 892,998 km.

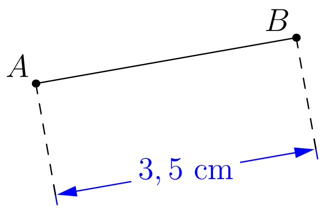
   J'écris donc : $d$ . . . 893 km.

**Définition 24 (distance entre deux points)**

La **distance entre deux points** $A$ et $B$ est la longueur du segment $[AB]$.
Une distance est une grandeur.

**Exemple**

Ci-dessous, le segment $[AB]$ mesure 3,5 cm.
On note : $AB$=3,5 cm.




**Définition 25 (distance d'un point à une droite)**

La **distance** entre un point $A$ et une droite $(d)$ est la distance entre le point $A$ et le point de la droite qui est le plus proche de $A$.

**Propriété 11 (Distance d'un point à une droite)**

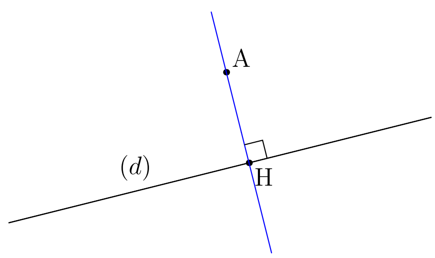
La distance d'un point $A$ à une droite $(d)$ est la longueur du segment dont les extrémités sont :

- le point $A$ ;
- le point d'intersection $H$ entre la droite $(d)$ et sa perpendiculaire passant par $A$.

**Exemple**

Avec les notations de la propriété ci-dessus :

$AH$ est la distance du point $A$ à la droite $(d)$.



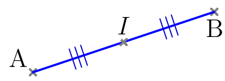

**Remarque**

Si le point $A$ appartient à la droite $(d)$, alors la distance de $A$ à $(d)$ est nulle.

## 7 Milieu d'un segment

**Définition 26 (milieu d'un segment)**
Le **milieu d'un segment** $[AB]$ est le point qui appartient à ce segment et qui est à égale distance de $A$ et de $B$.

**Exemple**
Ci-dessous, le codage de la figure indique que $I$ est le milieu du segment $[AB]$.




**Propriété 12 (milieu d'un segment)**
Si $I$ est le milieu du segment $AB$ alors :

$$AI = IB.$$

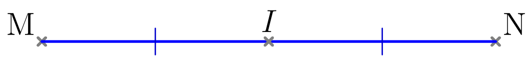
$$AB = 2 \times IB.$$

**Exemple**
Un segment d'extrémités $M$ et $N$ a pour longueur 10 cm.
On appelle $I$ le milieu de ce segment.

1. Nommer ce segment.
2. Indiquer sans justifications les longueurs $MI$ et $IN$.
3. Réaliser et coder une figure.

**Réponses**

1. Je nomme ce segment ...
2. ... $= 5\,\text{cm}$ et ... $=5\,\text{cm}$.
3. Je réalise la figure ci-contre.



**Exemple**


On observe le déplacement d'un oiseau :

- Il se déplace en ligne droite.
- Il part du point $A$, dans la cour du collège.
- Il arrive au point $B$, près de l'accueil du lycée.
- Le milieu de son trajet se situe au point $M$, sur le chemin de Belle Ferme.
- La distance du point $A$ au point $M$ est de 146 m.

1. Démontrer que $AB = 2 \times AM$.
2. En déduire la distance totale parcourue par l'oiseau.

**Réponse**

1. Avec un chaînon déductif :

| Je sais que : | Propriété : | Conclusion : |
|---|---|---|
| ... est le milieu de ... | Si ... <br> alors ... | $AB = 2 \times \; \ldots$ . |

2. $AB = 2 \times \ldots = 2 \times \ldots = \ldots$
   L'oiseau parcourt au total ...

# 8 Programmes de construction

**Définition 27 (programme de construction)**
Un **programme de construction** est un texte qui liste des instructions permettant de tracer une figure géométrique.

**Définition 28 (conjecture)**
Une **conjecture** est une proposition que l'on considère comme vraie mais que l'on n'a pas encore démontrée.
Après démonstration, une conjecture peut s'avérer vraie ou fausse.

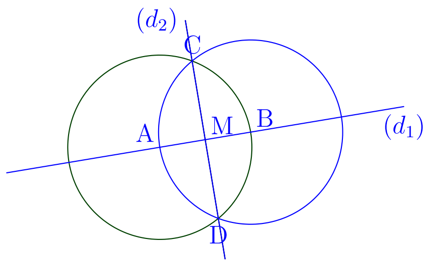
**Méthode (écrire un programme de construction)**

Pour écrire un programme de construction, on s'efforce :

- de donner une seule consigne par phrase ;
- d'utiliser uniquement les verbes placer (un point) et tracer (une droite, un cercle...) ;
- de rédiger de façon claire et précise.

**Exemple**

1. Écrire un programme de construction de la figure ci-contre.
2. Proposer une conjecture concernant les droites $(d_1)$ et $(d_2)$.
3. Proposer une conjecture concernant le point $M$ et le segment $[AB]$.




**Réponse**

1. Voici un programme de construction possible :
   a. Placer deux points distincts $A$ et ...
   b. Tracer la droite $(d_1)$ passant par $A$ et ...
   c. Tracer le cercle de centre $A$ passant par ...
   d. Tracer le cercle de centre $B$ passant par ...
   e. Placer les points $C$ et $D$ aux intersections de ces deux cercles, avec $C$ au-dessus de $D$.
   f. Tracer la droite $(d_2)$ passant par $C$ et par $D$.
2. Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ semblent ...
3. Le point $M$ semble être ...

**Méthode (exécuter un programme de construction)**

Pour exécuter un programme de construction il est conseillé de :

- suivre les instructions dans l'ordre où elles sont rédigées ;
- recenser le matériel nécessaire (règle, équerre, compas...) ;
- construire la figure.

**Exemple**

Voici, côte à côte, un programme de construction et la figure correspondante :

a. Placer un point $A$.

b. Tracer la droite verticale $(d_1)$ passant par $A$.

c. Placer le point $M$, en-dessous de $A$, tel que $M \in (d_1)$ et $AM$=2 cm.

d. Tracer en bleu le cercle de centre $M$ passant par $A$.

e. Placer un point $B$ tel que $M$ soit le milieu de $[AB]$.

f. Tracer en rouge le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $A$ passant par $M$.

g. Tracer la droite $(d_2)$ passant par $A$, avec $(d_1) \perp (d_2)$.

h. Placer le point $K$ à droite de $A$ tel que $K \in (d_2)$ et $K \in \mathcal{C}_2$.

i. Tracer le segment $[KM]$.

j. Placer le point $L$ à l'intersection de $[CM]$ et $\mathcal{C}_1$.