CHAPITRE 8

QUADRILATÈRES

1 Reconnaître des quadrilatères particuliers

1.1 Les quadrilatères

Définition 56 (quadrilatère)

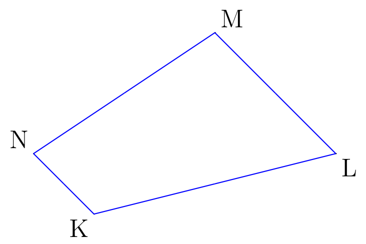
Un **quadrilatère** est un polygone qui a quatre côtés.

Notation

On nomme un quadrilatère en citant les lettres de ses sommets dans l'ordre des côtés.

Exemple

- On peut nommer ce quadrilatère $KLMN$, $LMNK$, mais pas $KMLN$.
- Les segments $[KL]$ et $[KN]$ sont deux côtés ...
- Les segments $[KL]$ et $[MN]$ sont deux côtés ...
- Le segment $[KM]$ est une ...



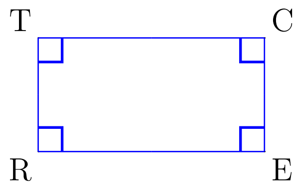
Propriété 31 (quadrilatère)

Un quadrilatère possède quatre côtés, quatre sommets et deux diagonales.

1.2 Le rectangle

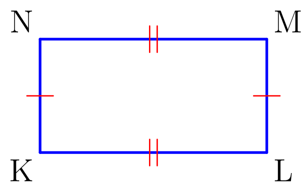
Définition 57 (rectangle)
Un **rectangle** est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.

Exemple
Le codage du quadrilatère $CERT$ montre quatre angles droits, donc c'est un ...



Propriété 32 (côtés opposés d'un rectangle)
Si un quadrilatère est un rectangle alors deux côtés opposés ont la même longueur.

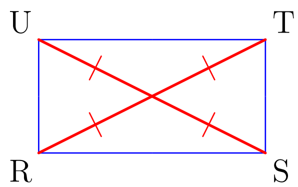
Exemple
Le codage du quadrilatère $KLMN$ montre que $KL = MN$ et $KN = LM$.



Propriété 33 (diagonales d'un rectangle)
Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même mesure.

Propriété 34 (diagonales d'un rectangle)
Si un quadrilatère a des diagonales de même mesure et qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle.

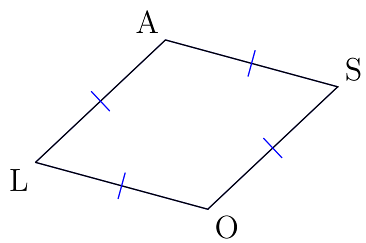
Exemple
Les diagonales du quadrilatère $RSTU$ sont de même longueur et ce coupent en leur milieu, donc $RSTU$ est un ...



1.3 Le losange

Définition 58 (losange)
Un **losange** est un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur.

Exemple
Le quadrilatère $LOSA$ possède quatre côtés de même longueur. C'est donc un ...

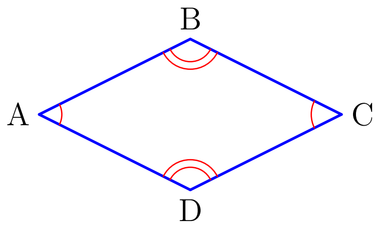


Propriété 35 (côtés opposés d'un losange)
Si un quadrilatère est un losange alors ses côtés opposés sont parallèles.

Propriété 36 (angles opposés d'un losange)
Si un quadrilatère est un losange alors ses angles opposés sont de même mesure.

Exemple
Le quadrilatère $ABCD$ est un losange. Ses angles opposés sont de même mesure.

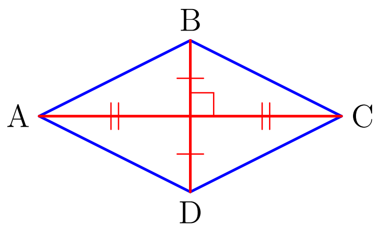
- $\widehat{\ldots} = \widehat{\ldots}$
- $\widehat{\ldots} = \widehat{\ldots}$



Propriété 37 (diagonales d'un losange)
Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Propriété 38 (diagonales d'un losange)
Si un quadrilatère a ses diagonales qui sont perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu alors c'est un losange.

Exemple
D'après le codage, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un losange.

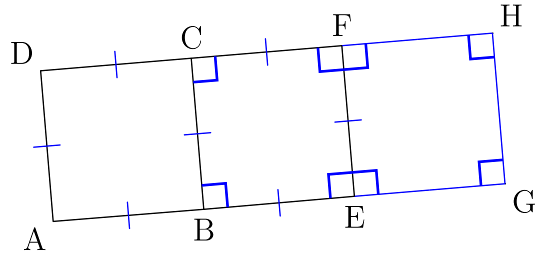


1.4 Le carré

Définition 59 (carré)
Un **carré** est un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.

Exemple

1. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un carré ?
2. Même question pour $BEFC$.
3. Même question pour $EGHF$.



Réponses :

1. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un carré ?

   Le codage du quadrilatère $ABCD$ n'indique pas si ses angles sont droits.

   Je ne peux donc pas affirmer que $ABCD$ est un carré.

2. Le quadrilatère $BEFC$ est-il un carré ?

   Le codage de la figure nous donne suffisamment d'informations pour réaliser un chaînon déductif.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
Les quatre côtés $[BE]$, $[EF]$, $[FC]$ et $[CB]$ ont ... Les quatre angles $\widehat{CBE}$, $\widehat{BEF}$, $\widehat{EFC}$ et $\widehat{FCB}$ sont ...	...	$BEFC$ est un ...

3. Le quadrilatère $EFGH$ est-il un carré ?

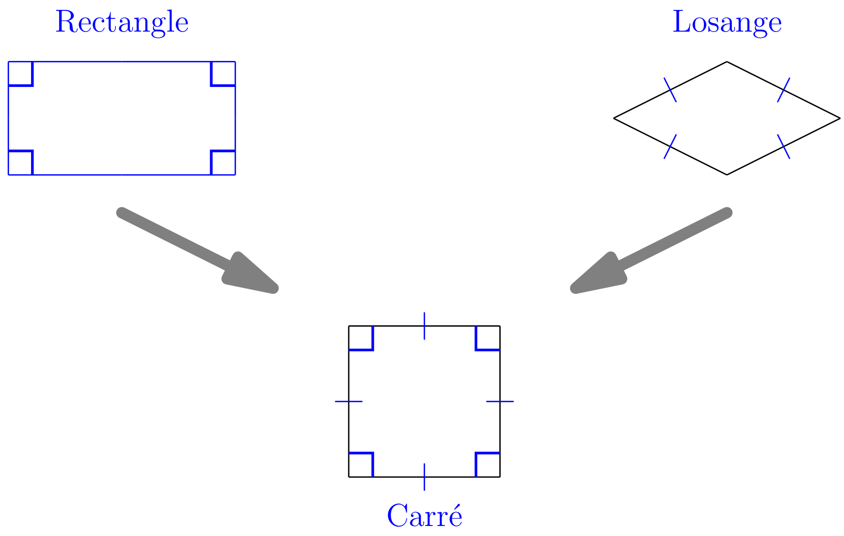
   Le codage du quadrilatère $EGHF$ n'indique pas si les quatre côtés ont la même longueur.

   Je ne peux donc pas être sûr que que $EGHF$ est un carré.

Remarque

Un carré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.
Un carré est un losange dont les quatre angles sont droits.

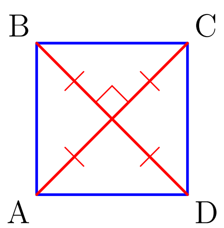
Propriété 39 (carré, losange et rectangle)
Un carré est à la fois un rectangle et un losange.



Propriété 40 (diagonales d'un carré)
Si un quadrilatère est un carré alors ses diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu.

Propriété 41 (diagonales d'un carré)
Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur, qui se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires alors c'est un carré.

Exemple
Le quadrilatère $ABCD$ possède des diagonales de même longueur, qui se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires. C'est donc un carré.

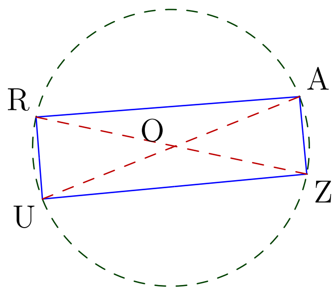


Exemple

On considère le quadrilatère $AZUR$.
AU et RZ sont des diamètres du cercle de centre O.

1. Réaliser un schéma à l'aide de la règle et du compas.
2. Démontrer que $AZUR$ est un rectangle.

Réponses



1. Ci-contre, un schéma possible.
2. Les diagonales du quadrilatère $AZUR$ sont ... et ... .
   Comme ... et ... sont des diamètres d'un même cercle :

   $$\ldots = \ldots$$

   Par construction, les deux diagonales qui sont des diamètres du cercles ont le même milieu.

À l'aide d'un chainon déductif :

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
... = ... [...] et [...] ont le même milieu.	...	$AZUR$ est un ...

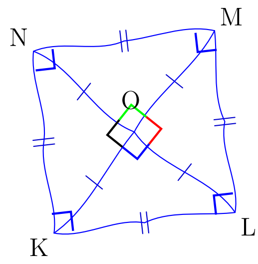
Exemple

Soit O l'intersection des diagonales d'un carré $KLMN$.

1. Que peut-on dire des angles $\widehat{KOL}$, $\widehat{LOM}$, $\widehat{MON}$ et $\widehat{NOK}$?
2. Que peut-on dire des triangles KOL, LOM,MON et NOK ?
3. Tracer et coder une figure.

Réponse

1. $KLMN$ est un carré, donc ses diagonales sont ...
   Donc, les angles $\widehat{KOL}$, $\widehat{LOM}$, $\widehat{MON}$ et $\widehat{NOK}$ sont des ...
2. Les triangles KOL, LOM, MON et NOK sont donc ...
3. Voici la figure tracée « à main levée ».



2 Constructions particulières

2.1 Construire un losange connaissant les longueurs de ses diagonales

Exemple

Écrire un programme de construction du losange $RENA$, connaissant les longueurs de ses deux diagonales :

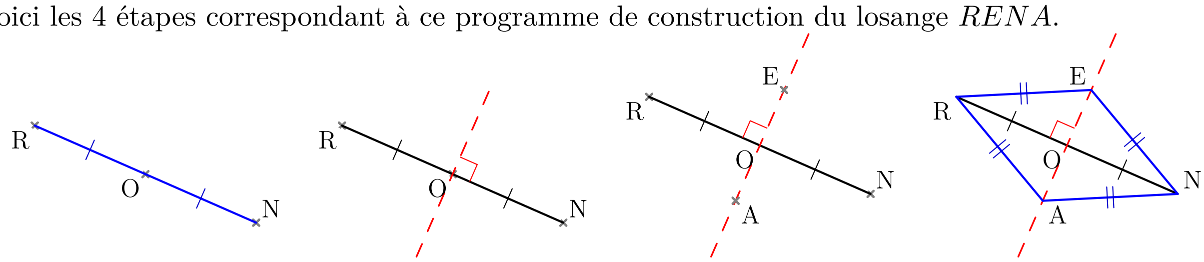
- $RN = 4\,\text{cm}$.
- $EA = 3\,\text{cm}$.

Puis construire un losange $RENA$.

Réponse

1. Tracer un segment $[RN]$ de longueur ... . Appeler O son milieu.
2. Tracer la droite perpendiculaire à (RN) passant par le point ...
3. Sur cette droite, placer les points E et A de part et d'autres de O et tels que O soit le milieu de $[EA]$.
   On a alors :
   $OE = OA = \dfrac{EA}{2} = \dfrac{\dots}{2} = \dots$
4. Tracer le losange $RENA$.

Voici les 4 étapes correspondant à ce programme de construction du losange $RENA$.



Étape 1 *Étape 2* *Étape 3* *Étape 4*

2.2 Construire un losange connaissant la longueur d'un côté et un angle

Exemple

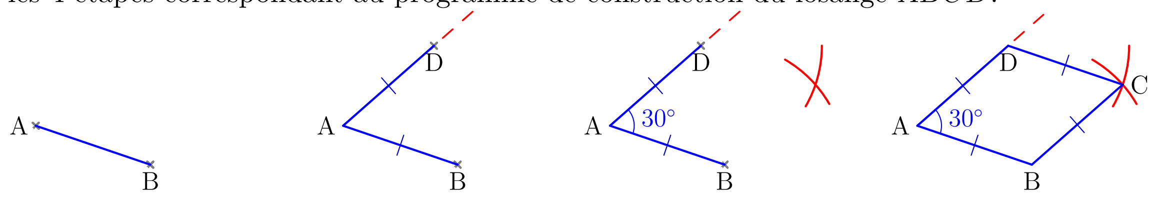
Construire un losange dont une diagonale mesure 4 cm et dont un angle mesure 30°.

Réponse

Construisons un losange $ABCD$ avec $AB = 4$ cm et $\widehat{BAD} = 30°$.

1. Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm.
2. Tracer une demi-droite $[AD)$ avec $\widehat{BAD} = 30°$ et AD =4 cm.
3. Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon 4 cm.
   Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon 4 cm.
4. Placer le point C à l'intersection de deux arcs de cercle.
   Tracer le losange $ABCD$.

Voici les 4 étapes correspondant au programme de construction du losange $ABCD$.



Étape 1 *Étape 2* *Étape 3* *Étape 4*

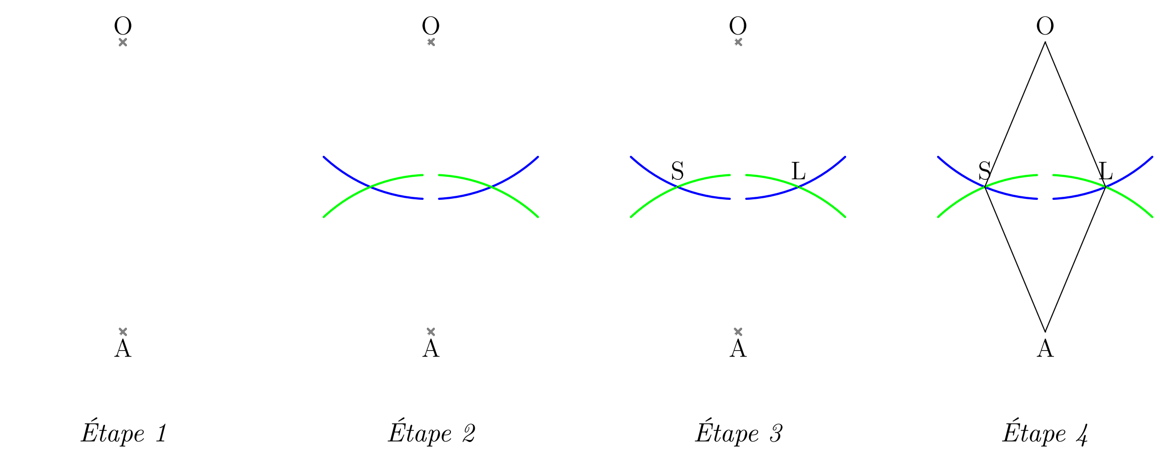
2.3 Construire un losange connaissant les longueurs d'un côté et d'une diagonale

Exemple

Construire un losange $LOSA$ de tel que LO =2,6 cm et tel que OA =4,8 cm en indiquant votre programme de construction.

Réponse

1. Placer deux points O et A distants de 4,8 cm.
2. Tracer un cercle de centre O et de rayon LO (en bleu).
   Tracer un cercle de centre A et de rayon LO (en vert).
3. Placer les points L et S aux intersections de ces deux cercles.
4. Tracer le losange $LOSA$.



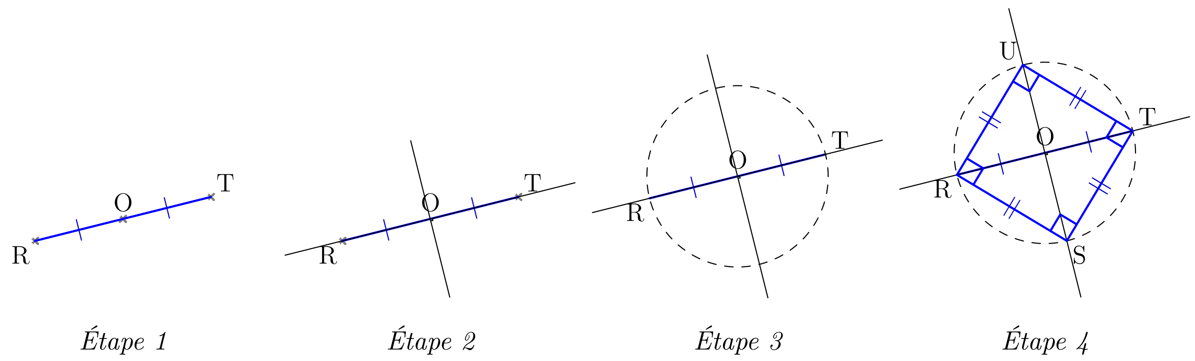
2.4 Construire un carré connaissant sa diagonale

Exemple

Construire un carré $RSTU$ de diagonale $RT = 3\,\text{cm}$ en indiquant votre programme de construction.

Réponse

1. Tracer un segment RT et placer son milieu O (étape 1).
2. Tracer la droite perpendiculaire à (RT) passant par O (étape 2).
3. Tracer le cercle de centre O et de rayon RO (étape 3).
4. Placer les points S et U et tracer le carré $RSTU$ (étape 4).

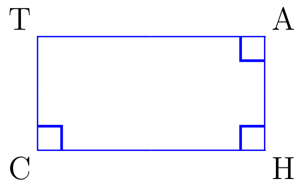


2.5 Démonstration d'une propriété

Propriété 42 (quadrilatère avec trois angles droits)
Si un quadrilatère a trois angles droits alors c'est un rectangle.

Démonstration

Démontrons qu'un quadrilatère $CHAT$ possédant trois angles droits est un rectangle.



Le codage indique que $(CT) \perp (CH)$ et $(AH) \perp (CH)$.

À l'aide d'un chaînon déductif, montrons que les droites (CT) et $(\dots)$ sont parallèles.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$(AT) \perp (AH)$ $(CH) \perp (AH)$	...	$(CH)//(\dots)$

Je sais maintenant que $(CH)//(AT)$ et je peux utiliser cette connaissance dans un second chaînon déductif, afin de montrer que $(CT) \perp (TA)$.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$(CH)//(TA)$ $(TC) \perp (CH)$	...	$(CT) \perp (\dots)$

Je sais maintenant que $(CT) \perp (\dots)$ donc $\widehat{CTA}$ est un angle ...

Le quadrilatère $CHAT$ possède donc quatre angles droits : c'est un ...