CHAPITRE 9

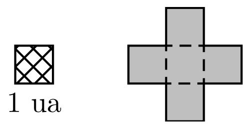
AIRE DES POLYGONES USUELS

1 Aire d'une figure

Définition 60 (aire, unité d'aire)
L'**aire** d'une figure est la mesure de sa surface dans une **unité d'aire**.
L'abbréviation unité d'aire est **ua**.

Méthode (Mesurer l'aire d'une figure par comptage)
Pour mesurer l'aire d'une figure, on choisit une unité d'aire, puis on compte le nombre d'unités d'aire de la figure.

Exemple
Si la surface du petit carré hachuré ci-contre mesure une unité d'aire, alors l'aire $\mathcal{A}$ de la figure en croix grisée est égale à 5 unités d'aire.
$\mathcal{A} = 5\,\text{ua}$



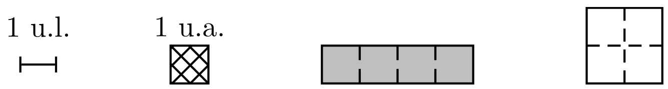
Remarques

1. Deux figures dont les périmètres sont égaux peuvent avoir des aires différentes.

$\mathcal{P} = \ \dots$ $\qquad$ $\mathcal{P} = \ \dots$
$\mathcal{A} = \ \dots$ $\qquad$ $\mathcal{A} = \ \dots$

Ci-dessus, le ”L” grisé et le carré blanc on le même périmètre, mais pas la même aire.

2. Deux figures de périmètres différents peuvent avoir des aires égales.



$\mathcal{P} = \ \ldots$ $\mathcal{P} = \ \ldots$

$\mathcal{A} = \ \ldots$ $\mathcal{A} = \ \ldots$

Ci-dessus, la barre grisée et le carré blanc ont la même aire, mais pas le même périmètre.

2 Définition et conversion des unités d'aires

2.1 Le système internationnal

Définition 61 (mètre carré)

L'unité du système international est le **mètre carré**, noté m^2.

$1\,\mathrm{m}^2$ est l'aire d'un carré de $1\,\mathrm{m}$ de côté.

Remarque

Pour convertir des unités d'aire on peut utiliser un tableau de conversion.

Exemple

a. Convertir $5{,}40\,\mathrm{m}^2$ en dm^2.

b. Convertir $0{,}000\,8\,\mathrm{m}^2$ en cm^2.

c. Convertir $1{,}35\,\mathrm{km}^2$ en m^2.

d. Convertir $12\,800\,\mathrm{m}^2$ en hm^2.

Réponses

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

a. $5{,}40\,\mathrm{m}^2 = \ \ldots$

b. $0{,}000\,8\,\mathrm{m}^2 = \ \ldots$

c. $1{,}35\,\mathrm{km}^2 = \ \ldots$

d. $12\,800\,\mathrm{m}^2 = \ \ldots$

2.2 Les unités agraires

Pour mesurer la superficie d'un terrain, on utilise encore parfois les **unités agraires**.

- un **are**, noté **a**, représente $100\,\mathrm{m}^2$;
- un **hectare**, noté **ha**, représente 100 ares, soit $1\,\mathrm{hm}^2$ ou encore $10\,000\,\mathrm{m}^2$.

3 Aires des polygones usuels

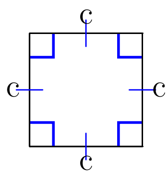
3.1 Aire d'un carré

Propriété 43 (aire d'un carré)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire d'un carré de côté c.

$\mathcal{A} =$ côté $\times$ côté.

$\mathcal{A} = c \times c$.



Exemple

Dans une compétition de judo, deux judokas s'affrontent sur un tapis de forme carrée de côté $c = 8\,\mathrm{m}$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du tapis.

Réponse

$\mathcal{A} = \ \ldots$

L'aire du tapis mesure donc ...

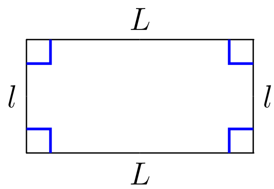
3.2 Aire d'un rectangle

Propriété 44 (aire d'un rectangle)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l.

$\mathcal{A} =$ Longueur $\times$ largeur.

$\mathcal{A} = L \times l$.



Exemple

Le terrain de rugby de Twickenham a la forme d'un rectangle de longueur $L = 105\,\text{m}$ et de largeur $l = 70\,\text{m}$.

Calculer son aire $\mathcal{A}$.

Réponse

$\mathcal{A} = L \times l = \ \ldots \ \times \ \ldots \ = \ \ldots$

L'aire du terrain de Twickenham mesure ...

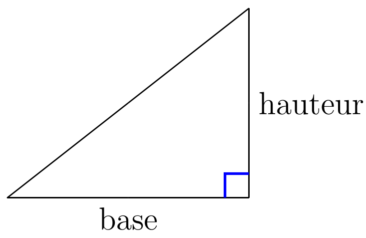
3.3 Aire d'un triangle rectangle

Propriété 45 (aire d'un triangle rectangle)

Dans un triangle rectangle, choisissons l'un des petits côtés comme base.
L'autre petit côté est la hauteur associée à cette base.

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle rectangle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$



Exemple

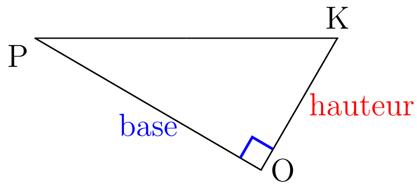
Soit un triangle POK rectangle en O avec $PO = 4\,\text{cm}$, $OK = 3\,\text{cm}$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de deux façons :

- d'abord en prenant $[PO]$ comme base ;
- ensuite en prenant $[OK]$ comme base.

Que remarquez-vous ?

Réponse

Prenons $[PO]$ comme base.
La hauteur associée est $[OK]$.



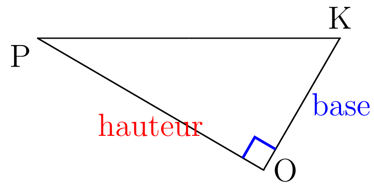
Je calcule l'aire du triangle POK :

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2}$

$\mathcal{A} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2} = \dfrac{\ldots}{2} = \ldots$

L'aire du triangle POK mesure ...

Prenons $[KO]$ comme base.
La hauteur associée est $[PO]$.



Je calcule l'aire du triangle POK :

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2}$

$\mathcal{A} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2} = \dfrac{\ldots}{2} = \ldots$

L'aire du triangle POK mesure ...

Je remarque que le calcul de l'aire du triangle ne dépend pas de la méthode de calcul, et plus précisément ne dépend pas du choix de la base.

Exemples

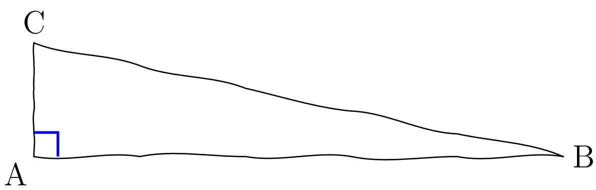
On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 24\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $BC = 25\,\text{cm}$.

a. Faire un schéma à main levée du triangle ABC.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle.

Réponses

a. Schéma à main levée.



b. Je choisis $[AB]$ comme base du triangle.
La hauteur correspondante est alors $[AC]$.
Je calcule $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2} = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2} = \dfrac{\ldots}{2} = \ldots .$
L'aire du triangle ABC mesure ...

3.4 Aire d'un triangle quelconque

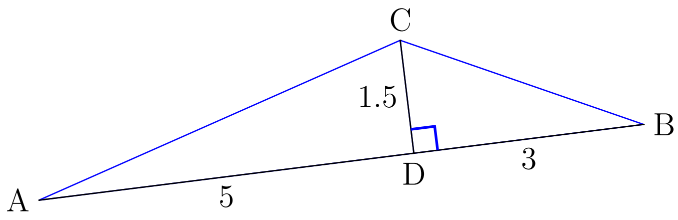
Propriété 46 (aire d'un triangle quelconque)
Dans un triangle quelconque, choisissons l'un des trois côtés comme base et considérons la hauteur associée à cette base.

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle rectangle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, les distances sont indiquées en cm.



a. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle ADC.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle DBC.

Réponse
Dans le triangle JKL, je choisis comme base le côté $[JK]$.
La hauteur correspondante est $[\ \dots\ ]$.
Je calcule l'aire du triangle JKL :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots}{2} = \ \dots .$$

L'aire du triangle JKL mesure ...

4 Aire d'une figure composée

Méthode (Calculer l'aire d'une figure par décomposition)

- On décompose la figure étudiée en figures simples usuelles (carré, rectangle ou triangle).
- On calcule les aires des figures simples.
- On additionne ou on soustrait ces aires pour calculer l'aire totale de la figure.

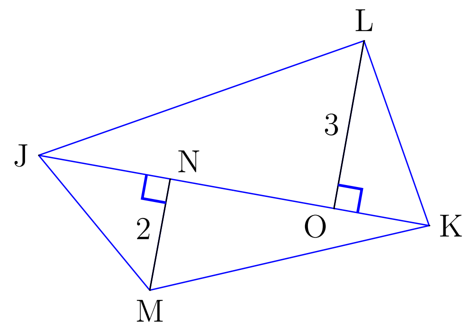
Exemple

Sur la figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les distances sont indiquées en cm.
On donne également : $JK = 7\,\text{cm}$.

a. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle JKL.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle JKM.

c. En déduire l'aire du quadrilatère $JLKM$.



Réponse

a. Dans le triangle JKL, je choisis comme base le côté $[JK]$.

La hauteur correspondante est $[\ \dots\ ]$.

Je calcule l'aire du triangle JKL :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots}{2} = \ \dots\ .$$

L'aire du triangle JKL mesure ...

b. Dans le triangle JKM, je choisis comme base le côté $[JK]$.

La hauteur correspondante est $[\ \dots\ ]$.

Je calcule l'aire du triangle JKM :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots\ \times\ \dots}{2} = \frac{\dots}{2} = \ \dots\ .$$

L'aire du triangle JKM mesure ...

c. On obtient le quadrilatère $KLKM$ par juxtaposition des triangles JKL et JKM.

L'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère est donc égale à la somme des aires de ces deux triangles.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \ \dots\ +\ \dots\ =\ \dots$

L'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère mesure ...