

CHAPITRE 13

DIVISION EUCLIDIENNE ET DÉCIMALE

1 Divisibilité

1.1 Vocabulaire

Définition 72 (diviseur, divisible, multiple)

Dans cet exemple : $56 = 8 \times 7$.

Les nombres 7 et 8 sont des **diviseurs** de 56.

Le nombre 56 est **divisible** par 7 et par 8. C'est aussi est un **multiple** de 7 et de 8.

Exemple

Faites une ou plusieurs phrases avec les mots « diviseur », « divisible » et avec les nombres 5, 7 et 35.

Réponse

- Les nombres ... et ... sont des diviseurs de ...
- Le nombre ... est divisible par les nombres ... et ...

Définition 73 (division euclidienne)

Effectuer la **division euclidienne** de 89 (le **dividende**) par 6 (le **diviseur**), c'est trouver deux nombres entiers, le **quotient** et le **reste**, tels que :

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}.$$

Et tels que le reste de la division est inférieur au diviseur :

$$89 = 6 \times 14 + 5.$$

Exemples

a. $56 = 14 \times 4 + 0$.

Dans la division euclidienne de 56 par 4, le dividende est ... , le diviseur est ... , le quotient est ... et le reste est ...

b. $23 = 5 \times 4 + 3$.

Dans la division euclidienne de 23 par 5, le dividende est ... , le diviseur est ... , le quotient est ... et le reste est

c. $481 = 160 \times 3 + 1$.

Dans la division euclidienne de 481 par 3, le dividende est ... , le diviseur est ... , le quotient est ... et le reste est ...

Posons ces trois divisions :

$$\begin{array}{r|l} 56 & 4 \\ -4 & 14 \\ \hline 16 & \\ -16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ -20 & 4 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 481 & 3 \\ -3 & 160 \\ \hline 18 & \\ -18 & \\ \hline 01 & \\ -0 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

2 Critères de divisibilité**Propriété 55 (critère de divisibilité par 2)**

Un nombre entier est **divisible par 2** s'il est pair, donc s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemples

Le nombre 37, le nombre 571 936 et le nombre 2 222,2 sont-ils divisibles par 2 ?

Réponse

- Le nombre 37 ne se termine pas par 0, 2, 4, 6 ou 8 donc ...
- Le chiffre des unités de 571 936 est 6, donc ...
- Le nombre 2 222,2 n'est pas un nombre entier : il ...

Propriété 56 (critère de divisibilité par 5)

Un nombre entier est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou par 5.

Exemples

Déterminer si le nombre 230 et le nombre 55 554 sont divisibles par 5.

Réponse

- a. Le nombre 230 se termine par 0 donc ...
- b. 55 554 ne se termine ni par 0, ni par 5, donc ...

Propriété 57 (critère de divisibilité par 10)

Un nombre entier est **divisible par 10** s'il se termine par 0.

Exemples

Déterminer si le nombre 980 et le nombre 1 000 005 sont divisibles par 10.

Réponse

- a. Le nombre 980 se termine par 0 donc ...
- b. Le chiffre des unités de 1 000 005 n'est pas 0, donc ...

Propriété 58 (critère de divisibilité par 3)

Un nombre entier est **divisible par 3** si la somme des chiffres est divisible par 3.

Exemples

Déterminer si le nombre 114 et le nombre 231 452 sont divisibles par 3.

Réponse

- a. Déterminons si 114 est divisible par 3.
 $1 + 1 + 4 = 6$.
 La somme des chiffres de 114 est divisible par ... , donc ...

b. 231 452 est-il divisible par 3 ?

$$2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 2 = 17.$$

La somme des chiffres de 231 452 n'est pas divisible par ... , donc ...

Propriété 59 (critère de divisibilité par 9)

Un nombre entier est **divisible par 9** si la somme des chiffres est divisible par 9.

Exemples

Déterminer si le nombre 432 et le nombre 3 259 sont divisibles par 9.

Réponse

a. Le nombre 432 est-il divisible par 9 ?

$$4 + 3 + 2 = \dots$$

La somme des chiffres de 432 est divisible par ... , donc 432 est ...

b. Déterminons si 3 259 est divisible par 9.

$$3 + 2 + 5 + 9 = \dots$$

La somme des chiffres de 3 259 n'est pas divisible par ... , donc 3 259 ...

Propriété 60 (critère de divisibilité par 4)

Un nombre est **divisible par 4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.

Exemples

Déterminer si le nombre 7532 et le nombre 4414 sont divisibles par 4.

Réponse

a. Le nombre 7532 est-il divisible par 4 ?

Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 7532 est ...

32 est un multiple de ... , donc 7532 est ...

b. Le nombre 4414 est-il divisible par 4 ?

Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 4414 est ...

... n'est pas un multiple de ... , donc 4414 ...

Résumons l'ensemble de ces critères de divisibilité d'un nombre entier dans un tableau.

Diviseur	Critère de divisibilité
2	Le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
5	Le chiffre des unités est 0 ou par 5.
10	Le chiffre des unités est 0.
3	La somme des chiffres du nombre est divisible par 3.
9	La somme des chiffres du nombre est divisible par 9.
4	Le nombre formé par ses deux derniers chiffres du nombre testé est lui-même divisible par 4.

3 La division décimale

Définition 74 (division décimale)

Soit a un nombre (entier ou décimal) et b un nombre entier non nul.

La **division décimale** du nombre a par le nombre b permet de calculer le quotient exact de a par b ou une valeur approchée de celui-ci.

Définition 75 (écriture fractionnaire)

Soit a un nombre (entier ou décimal) et b un nombre entier non nul.

Le **quotient** exact de a par b peut se noter de deux façons :

$$a \div b \qquad \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}$ est l'**écriture fractionnaire** du quotient de a par b .

Exemples

Poser et effectuer, si possible, les divisions décimales suivantes :

a. $23 \div 8$.

b. $13 \div 3$.

c. $23 \div 7$.

Réponses

Posons ces divisions.

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 16 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array} \bigg| 8 \quad 2,875$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 12 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 1 \end{array} \bigg| 3 \quad 4,333$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 21 \\ \hline 20 \\ - 14 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 35 \\ \hline 5 \end{array} \bigg| 7 \quad 3,285$$

a. $23 \div 8 = 2,875$.

Le quotient exact de la division décimale de 23 par 8 est 2,875.

b. $13 \div 3 \approx 4,333$.

Le quotient approché de la division décimale de 13 par 3 est 4,333.

c. $23 \div 7 \approx 3,286$.

Le quotient approché de la division décimale de 23 par 7 est 3,286.

Remarque

En continuant les deux dernières divisions on obtiendrait de meilleures approximations, par exemple :

– $13 \div 3 \approx 4,333\ 333\ 333\ 333\ 333$;

– $23 \div 7 \approx 3,285\ 714\ 285\ 714\ 29$.

Propriété 61 (multiplier, diviser numérateur et dénominateur par un même nombre)

On ne change pas le quotient de deux nombres décimaux quand on multiplie chacun d'eux par un même nombre (en particulier, par 10, par 100 ou par 1 000).

Remarque

Cette propriété permet de transformer une division lorsque le diviseur est un nombre décimal.

Propriété 62 (division par 10, 100 ou 1 000)

Pour diviser un nombre par :	On décale la virgule de ce nombre de :
10	1 rang vers la gauche
100	2 rang vers la gauche
1000	3 rang vers la gauche

4 Conversion de durée

4.1 Conversion de secondes en minutes et secondes

Exemple

Convertir 317 secondes en minutes et secondes.

Réponse

Une minute comporte 60 secondes.

La division euclidienne de 317 par 60 me donnera :

- comme quotient, le nombre de minutes dans 317 secondes.
- comme reste, le nombre de secondes résiduel.

Effectuons donc la division euclidienne de 317 par 60.

$$\begin{array}{r|l} 317 & 60 \\ - 300 & 5 \\ \hline 17 & \end{array}$$

Conclusion : $317\text{ s} = \dots \text{ min} + \dots \text{ s}$.

4.2 Conversion de secondes en heures, minutes et secondes

Exemple

Convertir 8017 secondes en heures, minutes et secondes.

Réponse

- Première étape

Commençons, comme précédemment, par convertir ce nombre de secondes en minutes et secondes.

$$\begin{array}{r|l}
 8017 & 60 \\
 - 60 & 133 \\
 \hline
 201 & \\
 - 180 & \\
 \hline
 217 & \\
 - 180 & \\
 \hline
 37 &
 \end{array}$$

8017 s = ... min ... s.

– Seconde étape

Convertissons 133 minutes en heures et minutes, en remarquant qu'une heure comporte 60 minutes.

La division euclidienne de 133 minutes par 60 me donnera :

- comme quotient, le nombre d'heures dans 133 minutes.
- comme reste, le nombre de minutes résiduelles.

$$\begin{array}{r|l}
 133 & 60 \\
 - 120 & 2 \\
 \hline
 13 &
 \end{array}$$

Je convertis ainsi 133 minutes en ... heures et ... minutes.

Conclusion :

8017 s = ... h + ... min + ... s.

Exemple

L'horloge interne d'une voiture robot autonome indique que celle-ci a roulé pendant une durée de 53 008 secondes avant de s'arrêter.

Convertir cette durée en heures, minutes et secondes.

Réponse

– Première étape

Je convertis 53 008 secondes en minutes et secondes.

$$\begin{array}{r|l}
 53008 & 60 \\
 - 480 & 883 \\
 \hline
 500 & \\
 - 480 & \\
 \hline
 208 & \\
 - 180 & \\
 \hline
 28 &
 \end{array}$$

53 008 secondes représentent ... minutes et ... secondes.

– Seconde étape

Je convertis 883 minutes en heures et minutes.

$$\begin{array}{r|l} 883 & 60 \\ - 60 & 14 \\ \hline 283 & \\ - 240 & \\ \hline 43 & \end{array}$$

883 minutes représentent ... et ... minutes.

Conclusion :

$$53\,008\text{ s} = \dots \text{ h} + \dots \text{ min} + \dots \text{ s.}$$

4.3 Conversion d'heures en semaines, jours et heures

Exemple

Convertir 631 heures en semaines, jours et heures.

Réponse

– Première étape

Un jour comporte 24 heures.

La division euclidienne de 631 par 24 me donnera :

- comme quotient, le nombre de jours dans 631 heures.
- comme reste, le nombre d'heures résiduelles.

$$\begin{array}{r|l} 631 & 24 \\ - 48 & 26 \\ \hline 151 & \\ - 144 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

631 heures correspondent donc à ... jours et ... heures.

– Seconde étape

Pour convertir 26 jours en semaines, observons qu'une semaine comporte 7 jours.

La division euclidienne de 26 par 7 me donnera :

- comme quotient, le nombre de semaines dans 26 jours.
- comme reste, le nombre de jours résiduels.

$$\begin{array}{r|l} 26 & 7 \\ - 21 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}$$

26 jours correspondent donc à ... semaines et ... jours.

Conclusion :

$$631\text{ h} = \dots \text{ semaines} + \dots \text{ jours} + \dots \text{ h.}$$