CHAPITRE 11

CERCLE ET DISQUE

1 Le cercle

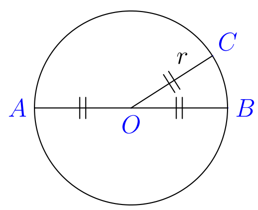
Définition 69 (cercle, centre, rayon)
Le **cercle** $\mathcal{C}$ de **centre** O et de **rayon** r est l'ensemble de tous les points situés à la distance r du centre.

Propriété 51 (appartenance d'un point à un cercle)
Si un point A appartient à un cercle de centre O et de rayon r, alors le point A est situé à la distance r du centre O.

Propriété 52 (appartenance d'un point à un cercle)
Si un point A est situé à la distance r d'un point O, alors il appartient au cercle de centre O et de rayon r.

Exercice 11.1

- Le point O est le centre du cercle.
- Les points A, B et C sont des points du cercle.
- Les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle.
- Les points A, B et C sont tous situés à la distance r du cercle, donc : $r = OA = OB = OC$.



Définition 70 (corde, diamètre, arc)

Si K et L sont des points du cercle alors $[KL]$ est une **corde**.

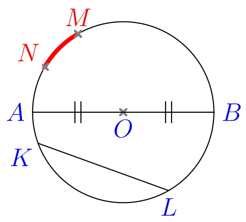
Si une corde passe par le centre du cercle alors c'est un **diamètre**.

L'**arc de cercle** $\overset{\frown}{MN}$ est la portion du cercle limitée par les points M et N.

Exercice 11.2

Ci-contre :

- Le point O est le centre du cercle.
- $\overset{\frown}{MN}$ est un arc de cercle.
- $[KL]$ est une corde.
- $[AB]$ est un diamètre.
  c'est également une corde.



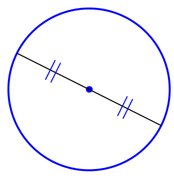
Propriété 53 (diamètre = 2 × rayon)

Si O est le centre d'un cercle de diamètre $[AB]$ alors :

$$AB = 2 \times OA = 2 \times OB.$$

Remarque

Cela signifie que dans un cercle, la valeur du diamètre est égale à deux fois celle du rayon, comme on peut l'observer ci-dessous.



Remarques

- On peut définir un cercle lorsqu'on connaît son centre O et son rayon r.
  On parle alors du cercle de centre O et de rayon r.
- On peut également définir un cercle lorsqu'on connaît deux points A et B du cercle formant un diamètre de ce cercle.
  On parle alors du cercle de diamètre $[AB]$.

2 Périmètre d'un cercle

2.1 Définitions

Définition 71 (circonférence)
Le périmètre $\mathcal{P}$ d'un cercle de diamètre d ou de rayon r est aussi appelé **circonférence** du cercle.

$$\mathcal{P} = d \times \pi.$$

$$\mathcal{P} = 2 \times r \times \pi.$$

On appelle π le nombre par lequel on multiplie le diamètre d'un cercle pour obtenir sa circonférence.

Remarque
le nombre π n'est pas un nombre décimal.
Il s'écrit avec une infinité de chiffres après la virgule.
En conservant "seulement" 60 chiffres après la virgule, nous obtenons cette approximation.

$$\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944.$$

Nous allons ~~apprendre par cœur~~ utiliser une approximation de π avec deux décimales « seulement ».

Dans les calculs on prendra, sauf indication contraire, l'approximation suivante de π :

$$\pi \approx 3{,}14.$$

Notation
Lorsqu'on multiplie un nombre par π, on pourra omettre le signe « $\times$ ».

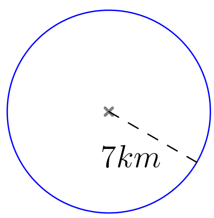
$$2 \times \pi = 2\pi.$$

2.2 Calculer le périmètre d'un cercle dont on connaît le rayon

Exercice 11.3
On considère un cercle de rayon $r = 7\,\text{km}$.

a. Calculer la valeur exacte du périmètre $\mathcal{P}$ de ce cercle.

b. Déterminer la valeur arrondie au dixième de $\mathcal{P}$.



Réponse

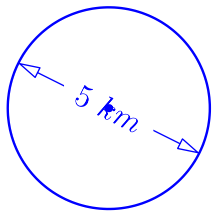
a. Je calcule le périmètre $\mathcal{P}$ du cercle.
$\mathcal{P} = 2 \times r \times \pi = 2 \times 7 \times \pi = 14 \times \pi$.
Le périmètre du cercle mesure exactement 14π km.

b. En prenant $\pi \approx 3,14$:
$\mathcal{P} \approx 14 \times 3,14 \approx 43,96 \approx 44,0$.
Le périmètre du cercle mesure environ 44,0 km.

2.3 Calculer le périmètre d'un cercle dont on connaît le diamètre

Exercice 11.4

On considère un cercle de diamètre $d = 5$ km.



a. Calculer la valeur exacte du périmètre $\mathcal{P}$ de ce cercle.

b. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\mathcal{P}$.

Réponse

a. On peut calculer le périmètre du cercle de deux façons différentes.

À partir du rayon :	À partir du diamètre :
Je calcule le rayon r du cercle. $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ km. Je calcule le périmètre $\mathcal{P}$. $\mathcal{P} = 2 \times r \times \pi = 2,5 \times 2 \times \pi = 5 \times \pi$.	Je calcule le périmètre $\mathcal{P}$. $\mathcal{P} = d \times \pi = 5 \times \pi$.

Le périmètre du cercle mesure exactement 5π km.

b. En prenant $\pi \approx 3,14$:
$\mathcal{P} \approx 5 \times 3,14 \approx 15,70$
Le périmètre du cercle mesure environ 15,70 km.

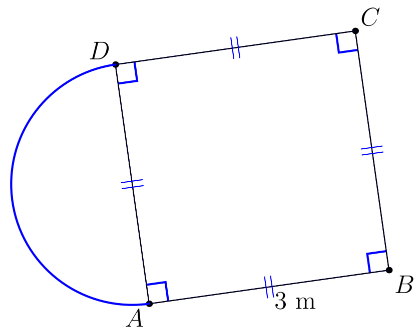
2.4 Calculer le périmètre d'une figure composée

Exercice 11.5

On considère la figure ci-dessous, composée d'un demi-cercle et d'un carré de côté 3 m.

1. Calculer la valeur exacte de son périmètre $\mathcal{P}$.

2. Calculer la valeur approchée de $\mathcal{P}$ arrondie au dixième.



Réponse

1. Le périmètre $\mathcal{P}$ de la figure est donné par : $\mathcal{P} = AB + BC + CD + \widehat{DA}$.

   $ABCD$ est un carré de côté 3 m donc :
   - $AB = 3\,\text{m}$.
   - $BC = 3\,\text{m}$.
   - $CD = 3\,\text{m}$.

   La longueur $\widehat{DA}$ du demi-cercle est égale à la moitié du périmètre du cercle de diamètre $[DA]$, donc :
   - $\widehat{DA} = \dfrac{1}{2} \times$ (périmètre du cercle complet)

     $\widehat{DA} = \dfrac{1}{2} \times DA \times \pi = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \pi = 1,5 \times \pi = 1,5\pi$ m.

   Nous pouvons maintenant calculer $\mathcal{P}$.

   $\mathcal{P} = AB + BC + CD + \widehat{DA}$

   $\mathcal{P} = 3 + 3 + 3 + 1,5 \times \pi$

   $\mathcal{P} = 9 + 1,5 \times \pi$.

   La valeur exacte du périmètre $\mathcal{P}$ de la figure est $9 + 1,5 \times \pi$ m.

2. Prenons $\pi \approx 3,14$.

   $\mathcal{P} \approx 9 + 1,5 \times 3,14 \approx 9 + 4,71 \approx 13,71 \approx c13,7$.

   Le périmètre $\mathcal{P}$ de la figure mesure environ 13,7 m.

3 Le disque

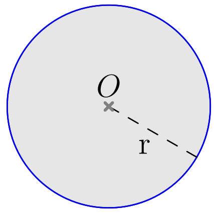
Définition 72 (disque)

Le **disque** $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r est l'ensemble de tous les points situés à une distance du centre inférieure ou égale à r.

Exemple

Ci-contre, on représente un disque de centre O et de rayon r.
Ce disque est composé :

- des points du cercle de centre O et de rayon r, en bleu :
- et des points situés à l'intérieur de ce cercle, en gris.

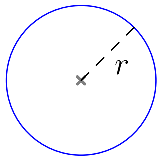


Propriété 54 (aire d'un disque)

L'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon r est donnée par :

$\mathcal{A} = \pi \times \text{rayon} \times \text{rayon}.$

$\mathcal{A} = \pi \times r \times r.$



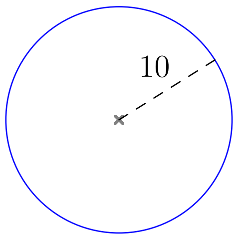
4 Calculer l'aire d'un disque

4.1 Calculer l'aire d'un disque dont on connaît le rayon

Exercice 11.6

On considère le disque ci-contre.
La mesure du rayon r est indiquée en cm sur la figure.
Calculer l'aire du disque en précisant :

1. la valeur exacte ;
2. la valeur approchée à l'unité.



Réponse

1. Le codage de la figure nous apprend que $r = 10\,\text{cm}$.

   Je calcule l'aire du disque :

   $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi \times 10 \times 10 = \pi \times 100 = 100 \times \pi = 100\pi.$

   La valeur exacte de l'aire du disque est $100\pi\,\text{cm}^2$.

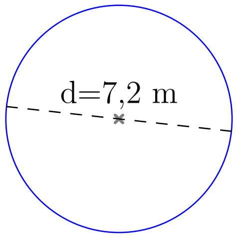
2. Pour calculer la valeur approchée de l'aire, je prends $\pi \approx 3{,}14$.
   $\mathcal{A} = 100 \times \pi \approx 100 \times 3{,}14 \approx 314$.
   L'aire du disque mesure environ $314\,\text{cm}^2$.

4.2 Calculer l'aire d'un disque dont on connaît le diamètre

Exercice 11.7

Ci-contre, on représente un disque de diamètre 7,2 m.
Calculer l'aire du disque en précisant :

1. la valeur exacte ;
2. la valeur approchée au dixième.



Réponse

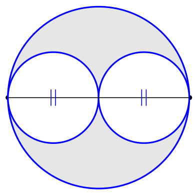
1. Je calcule le rayon du disque.
   $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{7,2}{2} = 3{,}6\,\text{m}$.
   Je calcule l'aire du disque :
   $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi \times 3,6 \times 3,6 = \pi \times 12,96 = 12,96 \times \pi$.
   La valeur exacte de l'aire du disque est $12{,}96\pi\,\text{m}^2$.
2. Pour calculer la valeur approchée de l'aire, j'arrondi la valeur de pi à $\pi \approx 3{,}14$.
   $\mathcal{A} = 12,96 \times \pi \approx 12,96 \times 3{,}14 \approx 40{,}694\,4$
   $\mathcal{A} \approx 40{,}7$.
   L'aire du disque mesure environ $40{,}7\,\text{m}^2$.

4.3 Calculer l'aire d'une surface composée de figures simples (dont des disques)

Exercice 11.8

Ci-contre, chaque petit disque a un diamètre $d = 6\,\text{cm}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'aire de la surface grisée.
2. En déduire une valeur approchée au dixième près.



Réponse

1. a. Je calcule le rayon r d'un petit disque.
   $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\,\text{cm}$.

Je calcule l'aire de chaque petit disque.

$\mathcal{A}_p = r \times r \times \pi = 3 \times 3 \times \pi = 9 \times \pi.$

L'aire d'un petit disque mesure $9\pi\,\text{cm}^2$.

b. Le diamètre d d'un petit disque est aussi le rayon R du grand disque : $R = d$.

Je peux donc calculer l'aire du grand disque.

$\mathcal{A}_G = R \times R \times \pi = 6 \times 6 \times \pi = 36 \times \pi.$

L'aire du grand disque mesure $36\pi\,\text{cm}^2$.

c. L'aire de la surface grisée est égale à l'aire du grand disque à laquelle on soustrait l'aire des deux petits disques.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_G - 2 \times \mathcal{A}_p$

$\mathcal{A} = c36 \times \pi - 2 \times 9 \times \pi$

$\mathcal{A} = 36 \times \pi - 18 \times \pi$

$\mathcal{A} = (36 - 18) \times \pi$

$\mathcal{A} = 18 \times \pi.$

L'aire de la partie grisée de la figure mesure exactement $18\pi\,\text{cm}^2$.

2. $\mathcal{A} \approx 18 \times 3,14 \approx 56,52 \approx 56,5.$

L'aire de la partie grisée de la figure mesure environ $56{,}5\,\text{cm}^2$.