CHAPITRE 4

ÉQUATIONS

1 Définitions

Définition 25 (inconnue)
Une **inconnue** est un nombre symbolisé par une lettre, dont on ne connaît pas la valeur.

Exemple
Avec 20 € on achète 7 stylos identiques et il reste 2,5 €. On appelle x le prix d'un stylo.
La lettre x désigne ici l'inconnue du problème.

Définition 26 (égalité)
Une **égalité** est une relation entre deux expressions.
Elle comporte deux membres séparés par le signe « = ».

Une égalité peut être vraie ou fausse.

Exercice 4.1

a. $3 = 2 + 1$ est une égalité ...

b. $5 = 2 + 2$ est une égalité ...

Définition 27 (équation)
Une **équation** est une égalité comportant au moins une inconnue.

Exercice 4.2

a. $5n = 2n + 12$ est une équation comportant une inconnue : $\dots$

b. $x^2 + y^2 = 1$ est une équation comportant deux inconnues : $\dots$ et $\dots$

Définition 28 (équation du premier degré)
Une **équation du premier degré** est une égalité comportant une inconnue, généralement appelée x, qui peut se mettre sous la forme :

$$ax + b = cx + d.$$

Où a, b, c et d sont des nombres.

Exercice 4.3
Parmi les équations suivantes, indiquez (oui/non) les équations du premier degré :

(1) $3x + 1 = 0.$

(2) $3x^2 + 1 = 0.$

(3) $2 - x = 5 - x^3.$

(4) $x + 1 = \sqrt{x} + 1.$

(5) $4x + \frac{1}{x} = 9x + 2.$

(6) $\frac{x}{5} = 2.$

Réponse

(1) $\dots$

(2) $\dots$

(3) $\dots$

(4) $\dots$

(5) $\dots$

(6) $\dots$

2 Résoudre une équation du premier degré

2.1 Résoudre une équation de la forme *x+a=b*

Définition 29 (résoudre une équation)
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité.

Propriété 25 (conserver une égalité)
Une égalité est conservée quand on ajoute (ou quand on retranche) un même nombre aux deux membres de l'égalité.

Exercice 4.4

a. Résolvez l'équation $x - 3 = 10$.

b. Résolvez l'équation $x + 7 = 18$.

Réponse

a. Ajoutons $+3$ à chaque membre de l'équation :

$$x - 3 = 10$$

$$x - 3 + 3 = 10 + 3$$

$$x = \ \ldots$$

La solution de l'équation est $\ldots$

b. Ajoutons -7 à chaque membre de l'équation :

$$x + 7 = 18$$

$$x + 7 + (-7) = 18 + (-7)$$

$$x = \ \ldots$$

La solution de l'équation est $\ldots$

2.2 Résoudre une équation de la forme ax=b

Propriété 26 (conserver une égalité)

Une égalité est conservée quand on multiplie (ou quand on divise) les deux membres de l'égalité par un même nombre non nul.

Exercice 4.5

a. Résolvez l'équation $4x = 20$.

b. Résolvez l'équation $-2x = 14$.

Réponse

a. Multiplions par $\dfrac{1}{4}$ chaque membre de l'équation.

$$4x = 20$$

$$\frac{1}{4} \times 4x = 20 \times \frac{1}{4}$$

$$x = \ \ldots$$

La solution de l'équation est $\ldots$

b. Multiplions par $-\dfrac{1}{2}$ chaque membre de l'équation.

$$\begin{aligned} -2x &= 14 \\ -\frac{1}{2} \times (-2x) &= 14 \times -\frac{1}{2} \\ x &= \ \ldots \end{aligned}$$

$\times(-\frac{1}{2})$ $\times(-\frac{1}{2})$

La solution de l'équation est $\ \ldots$

2.3 Résoudre une équation de la forme ax+b=c

Remarque

Tentons de résoudre l'équation $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$.
Deux « stratégies » sont envisageables.

a. Soit on commence par ajouter $(-b)$ à chaque membre de l'équation.

b. Soit on commence par multiplier chaque membre de l'équation par $\dfrac{1}{a}$.

La première stratégie conduit généralement à des calculs plus simples.

Exercice 4.6

a. Résolvez l'équation $2x + 3 = 23$.

b. Résolvez l'équation $-5x + 12 = -33$.

Réponse

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 23 \\ 2x + 3 - 3 &= 23 - 3 \\ 2x &= 20 \\ \frac{1}{2} \times 2x &= 20 \times \frac{1}{2} \\ x &= \ \ldots \end{aligned}$$

-3 -3

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$

La solution de l'équation est $\ \ldots$

2.

$$
\begin{array}{ccc}
 & -5x + 12 = -33 & \\
-12 \curvearrowright & & \curvearrowleft -12 \\
 & -5x + 12 - 12 = -33 - 12 & \\
 & -5x = -45 & \\
\times \frac{-1}{5} \curvearrowright & & \curvearrowleft \times \frac{-1}{5} \\
 & \frac{-1}{5} \times (-5x) = (-45) \times (\frac{-1}{5}) & \\
 & x = \ \dots &
\end{array}
$$

La solution de l'équation est $\dots$

3 Vérifier si un nombre est solution d'une équation

Propriété 27 (vérifier une solution d'une équation)

Pour vérifier si un nombre est solution d'une équation dont l'inconnue est x, on calcule la valeur du membre de gauche de l'équation pour le nombre donné.
Si ces deux valeurs sont égales, alors le nombre choisi est une solution de l'équation.
Si ces deux valeurs sont différentes, alors le nombre choisi n'est pas une solution de l'équation.

Exercice 4.7

Déterminez si le nombre 2 est une solution de l'équation $3x + 5 = 9x - 7$.

Réponse

- Calculons la valeur du membre de gauche de l'équation pour $x = 2$.
  $3 \times 2 + 5 = 6 + 5 = \ \dots$
- Calculons la valeur du membre de droite de l'équation pour $x = 2$.
  $9 \times 2 - 7 = 18 - 7 = \ \dots$
- On constate que les deux membres $\dots$
- Donc le nombre 2 est $\dots$

4 Cas particuliers

Exercice 4.8

Résolvez les équations suivantes.

1. $x + 3 = x + 7$.
2. $2x = 2x$.

Réponse

1.

$$\begin{array}{ccc} & x+3=x+7 & \\ -x \downarrow & & \downarrow -x \\ & x+3-x=x+7-x & \\ & \ldots = \ldots & \end{array}$$

L'équation $\ldots$

2.

$$\begin{array}{ccc} & 2x=2x & \\ \div 2 \downarrow & & \downarrow \div 2 \\ & \dfrac{2x}{2}=\dfrac{2x}{2} & \\ & \ldots = \ldots & \end{array}$$

Tous les nombres $\ldots$

5 Modéliser et résoudre un problème avec une équation

Méthode

Pour résoudre un problème on peut suivre une démarche en quatre étapes.

a. Choisir une inconnue.

b. Mettre le problème en équation.

c. Résoudre l'équation.

d. Interpréter le résultat.

Exercice 4.9

Alia achète un livre à 8 € et trois cahiers valant chacun la même somme.
Elle paie 23 €.

Calculez le prix d'un cahier.

Réponse

a. Choisissons comme inconnue $\ldots$

b. Trois cahiers coûtent $3 \times x$ euros.

Le livre et les trois cahiers coûtent donc $8+3x$ euros.

Il faut donc résoudre l'équation $8+3x=23$.

c. Résolvons cette équation.

$8+3x=23$

$8 + 3x - 8 = 23 - 8$

$3x = 15$

$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{15}{3}$

$x = \ \ldots$

La solution de l'équation est $\ldots$

d. Un cahier coûte $\ldots$

Exercice 4.10

La longueur d'un rectangle est le triple de sa largeur, et son périmètre est égal à 32 cm. Déterminez la largeur et la longueur du rectangle.

Réponse

a. J'appelle x $\ldots$

Sa longueur vaut alors $3x$ et le périmètre $\mathcal{P}$ du rectangle est donné par l'expression :

$$\mathcal{P} = 2 \times \text{longueur} + 2 \times \text{largeur}$$

$\mathcal{P} = 2 \times \ \ldots \ + 2 \times \ \ldots$

$\mathcal{P} = \ \ldots \ + \ \ldots$

$\mathcal{P} = \ \ldots$

On cherche pour quelle valeur de x le périmètre est égal à 32 cm.

Il faut donc résoudre l'équation $\mathcal{P} = 32$, soit :

$8x = 32$.

b. Résolvons cette équation.

$8x = 32$

$\dfrac{8x}{8} = \dfrac{32}{8}$

$x = \ \ldots$

La solution de l'équation est $\ldots$

c. La largeur du rectangle mesure donc 4 cm.

$3x = 3 \times 4 = 12$.

Sa longueur mesure $\ldots$

Exercice 4.11

On considère les deux programmes de calcul suivants.

– Choisir un nombre. – Multiplier ce nombre par 4. – Ajouter 6. – Afficher le résultat.	– Choisir un nombre. – Multiplier ce nombre par 5. – Retrancher 2. – Afficher le résultat.

Pour quel nombre de départ obtient-on le même résultat ?

Réponse

a. Choisissons comme inconnue x ...
   - Le résultat du premier programme de calcul est donné par l'expression ...
   - Le résultat du second programme de calcul est donné par l'expression ...

   Les deux programmes produisent le même résultat lorsque : ... = ...

b. Résolvons cette équation.

   ... = ...

   ...

   ...

   ...

   ...

   ...

   $x =$ ...

   La solution de l'équation est ...

c. Les deux programmes de calcul produisent donc le même résultat lorsque le nombre choisi au départ est ...

Exercice 4.12

Fred a 7 ans et Léa a 39 ans.
Dans combien d'années Léa sera-t-elle trois fois plus âgée que Fred ?

Quel sera alors l'âge de chacun ?

Réponse

a. Soit x ...

   Présentons la situation dans un tableau :

Âge (en années)	de Fred	de Léa
Aujourd'hui	...	...
Dans x années	...	...

   L'âge de Léa sera le triple de celui de Fred lorsque ...

b. Résolvons cette équation.

   ...

   ...

   ...

   ...

   ...

…

…

…

…

La solution de l'équation est …

c. C'est donc dans … ans que l'âge de Léa sera le triple de celui de Fred.

   Léa aura alors $39 +$ … soit … ans.

   Fred aura alors $7 +$ … soit … ans.

Exercice 4.13

Un bateau comporte 70 sièges et lorsqu'il navigue, tous les passagers sont assis.
À l'embarquement, on a 7 femmes de moins que d'hommes parmi les passagers.
À la première escale, 3 hommes et 1 femme débarquent.
Il reste alors 23 places libres.

Combien d'hommes et de femmes y avait-il parmi les passagers à l'embarquement ?

Réponse

a. Soit x le nombre d'hommes parmi les passagers (on pourrait également choisir le nombre de femmes).

   À l'embarquement, le nombre de femmes est donc … et le nombre total de passager est …

   À la fin de la première escale, le nombre total de passagers est …

   Il est égal au nombre de sièges occupés, soit …

   Nous obtenons ainsi l'équation à résoudre :

   …

   Résolvons donc cette équation.

b. …

   …

   …

   …

   …

   …

   La solution de l'équation est …

c. Le bateau a donc embarqué … hommes et $29 -$ … soit … femmes.

Exercice 4.14

Alice, Bob, et Caïssa se partagent 60 bitcoins. Bob en a 4 fois plus qu'Alice, et Caïssa en a 3 de moins que Bob.

À l'aide d'une équation, déterminez le nombre de bitcoins de chacun(e).

Réponse

J'appelle x le nombre de bitcoins d'Alice. Donc :

- Bob en possède $4 \times x$.
- Alice en possède $\dots$

Á eux trois, ils en possèdent soixante. Je dois donc résoudre l'équation :

$$x + 4x + \dots = 60$$

$x + 4x + \dots = 60$

$\dots$

$\dots$

$\dots$

$\dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$

$x = \dots$

La solution de l'équation est $\dots$

En conclusion :

- Alice possède $\dots$ jetons.
- Bob possède $\dots$ soit $\dots$ jetons.
- Caïssa possède $\dots$ soit $\dots$ jetons

Vérification : $\dots + \dots + \dots = 60$.

$\dots$