

1 Notion d'inverse

Définition 44 (inverse)

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exercice 11.1

On remarque que $4 \times 0,25 = 1$.

- Le nombre 4 est l'inverse de ...
- Le nombre 0,25 est l'inverse de ...
- Les nombres ... et ... sont inverses l'un de l'autre.

Propriété 45 (signe de l'inverse d'un nombre)

Un nombre et son inverse ont le même signe.

Exercice 11.2

Complétez :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. $(+10) \times (\dots) = 1$. | L'inverse de $(+10)$ est $(\dots)$. |
| 2. $(-2) \times (\dots) = 1$. | L'inverse de (-2) est $(\dots)$. |

Remarques

- L'inverse de 1 est 1 : $(+1) \times (+1) = 1$.
- L'inverse de (-1) est (-1) : $(-1) \times (-1) = 1$.
- Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Propriété 46 (inverse d'un nombre x)

Soit x un nombre non nul. L'inverse du nombre x est le nombre $\frac{1}{x}$.

Exercice 11.3

Complétez :

$$11 \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

L'inverse de 11 est $\frac{\dots}{\dots}$.

$$(-7) \times \frac{\dots}{(\dots)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

L'inverse de (-7) est $\frac{\dots}{-\dots}$ soit $-\frac{\dots}{\dots}$.

Remarque

Attention à ne pas confondre un nombre et son opposé :

- la *somme* d'un nombre et de son opposé est égale à 0 : $(7) + (\dots) = \dots$
- le *produit* d'un nombre et de son inverse est égale à 1 : $(7) \times (\frac{\dots}{\dots}) = \dots$

Exercice 11.4

Donnez sous forme de fraction ou d'entier relatif, sans justification, l'opposé et l'inverse de chacun des nombres suivants :

a. -10.

c. -1.

e. 0,1.

g. 100.

b. -3.

d. -0,5.

f. 2.

h. 1 000.

Présentez les résultats sous forme de tableau.

Réponse

Nombre	-10	-3	-1	-0,5	0,1	2	100	1 000
Opposé	...	...	...	...	...	...	...	...
Inverse	...	...	...	...	...	...	...	...

2 Inverse d'une écriture fractionnaire ou d'une fraction

Propriété 47 (inverse d'un nombre en écriture fractionnaire)

Soient a et b deux nombres avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Le nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ possède un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Exercice 11.5

Complétez :

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Les nombres $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$ sont ...

3 Division de fractions

Propriété 48 (division de fractions)

Soient a, b, c et d quatre nombres avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Remarque

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \text{inverse de } \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Exercice 11.6

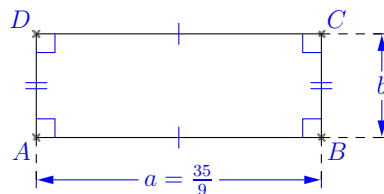
a. Calculez $x = \frac{\frac{28}{33}}{\frac{8}{15}}$.

b. On considère un rectangle de longueur $L = \frac{35}{9}$ m et d'aire $\mathcal{A} = \frac{20}{3}$ m².
Calculer sa largeur l sous forme de fraction simplifiée.

Réponse

a. $x = \frac{\frac{28}{33}}{\frac{8}{15}} = \frac{28}{33} \times \frac{15}{8} = \frac{28 \times 15}{33 \times 8} = \frac{\cancel{28}^7 \times \cancel{15}_3}{\cancel{33}_3 \times \cancel{8}_2} = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2}$

b. Représentons le rectangle étudié.



L'aire du rectangle est donnée par $\mathcal{A} = L \times l$.

On a donc $l = \frac{\mathcal{A}}{L}$.

$$l = \frac{\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots \times \cancel{\dots} \times \cancel{\dots} \times \dots}{\cancel{\dots} \times \dots \times \cancel{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$$

La largeur du rectangle mesure ...

Propriété 49 (division d'un fraction par un nombre décimal)

Soient a , b et c trois nombres avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c}.$$

Remarque

Fixons $d = 1$ dans la formule de la propriété précédente. Il vient : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{1}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a \times 1}{b \times c}$.

Ce qui nous donne : $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c}$.

Exercice 11.7

- a. On divise une tarte aux pommes en deux moitiés, puis chaque moitié est divisée en six petites parts égales.

Quelle fraction de la tarte représente chaque petite part ?

- b. Calculez $B = \frac{\frac{5}{2}}{3}$.

Réponse

$$c. \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{1}} = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Un petite part représente ... de la tarte entière.

$$d. B = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Exercice 11.8

Résolvez les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

a. $x - \frac{1}{4} = 1.$

c. $x - \frac{1}{3}x = 1.$

b. $\frac{2}{3}x = 1.$

Réponse

a. $x - \frac{1}{4} = 1$

$$x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{4+1}{4}$$

$$x = \frac{5}{4}.$$

La solution de l'équation est $\frac{5}{4}$.

b. $\frac{2}{3}x = 1$

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}x = 1 \times \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

La solution de l'équation est $\frac{3}{2}$.

c. $x - \frac{1}{3}x = 1$

$$1 \times x - \frac{1}{3}x = 1$$

$$(1 - \frac{1}{3})x = 1$$

$$(\frac{3}{3} - \frac{1}{3})x = 1$$

$$\frac{3-1}{3}x = 1$$

$$\frac{2}{3}x = 1$$

$$3 \times \frac{2}{3}x = 1 \times 3$$

$$2x = 3$$

$$\frac{2}{2}x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

La solution de l'équation est $\frac{3}{2}$.

Exercice 11.9

Résolvez les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

d. $-\frac{4}{3}x = 1.$

e. $\frac{7}{2}x = 0.$

Réponse

d. $-\frac{4}{3}x = 1$

$$(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{4}{3})x = 1 \times (-\frac{3}{4})$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

La solution de l'équation est $-\frac{3}{4}$.

e. $\frac{7}{2}x = 0$

On pourrait conclure dès maintenant, mais détaillons.

$$\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}x = 0 \times \frac{2}{7}$$

$$x = 0.$$

La solution de l'équation est 0.

Exercice 11.10

Résolvez les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

f. $\frac{4}{3}x = \frac{7}{11}.$

g. $\frac{-2}{3}x = -\frac{5}{4}.$

Réponse

$$\begin{aligned} \text{f. } \frac{4}{3}x &= \frac{7}{11} \\ \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}x &= \frac{7}{11} \times \frac{3}{4} \\ x &= \frac{7 \times 3}{11 \times 4} \\ x &= \frac{21}{44}. \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $\frac{21}{44}.$

$$\begin{aligned} \text{g. } \frac{-2}{3}x &= -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{-2} \times \frac{-2}{3}x &= -\frac{5}{4} \times \frac{3}{-2} \\ x &= -\frac{5 \times 3}{4 \times 2} \\ x &= -\frac{15}{8}. \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $-\frac{15}{8}.$

Exercice 11.11

Résolvez les équations suivantes. On donnera la solution sous forme de fraction simplifiée.

h. $\frac{2}{5}x = 1 - \frac{3}{4}.$

j. $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}.$

i. $\frac{3}{4}x - 2 = x + \frac{1}{3}.$

Réponse

$$\begin{aligned} \text{h. } \frac{2}{5}x &= 1 - \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5}x &= \frac{4}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5}x &= \frac{4-3}{4} \\ \frac{2}{5}x &= \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \times \frac{2}{5}x &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \\ x &= \frac{1 \times 5}{4 \times 2} \\ x &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $\frac{5}{8}.$

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{3}{4}x - 2 &= x + \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4}x - 2 + 2 &= x + \frac{1}{3} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &= x + \frac{1}{3} + 2 \\ \frac{3}{4}x - x &= x + \frac{1}{3} + 2 - x \\ \frac{3}{4}x - x &= \frac{1}{3} + 2 \\ \frac{3}{4}x - \frac{4}{4}x &= \frac{1}{3} + 2 \\ \frac{3-4}{4}x &= \frac{1}{3} + 2 \\ \frac{-1}{4}x &= \frac{1}{3} + 2 \\ \frac{-1}{4}x &= \frac{1}{3} + \frac{2 \times 3}{3} \\ \frac{-1}{4}x &= \frac{1}{3} + \frac{6}{3} \\ \frac{-1}{4}x &= \frac{1+6}{3} \\ \frac{-1}{4}x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{-1} \times \frac{-1}{4} x = \frac{7}{3} \times \frac{4}{-1}$$

$$x = -\frac{7 \times 4}{3 \times 1}$$

$$x = -\frac{28}{3}.$$

La solution de l'équation est $-\frac{28}{3}$.

j. $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$

$$2 \times \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3} \times 2$$

$$x+1 = 2 \times \frac{x-1}{3}$$

$$3 \times (x+1) = 2 \times \frac{x-1}{3} \times 3$$

$$3 \times x + 3 \times 1 = 2(x-1)$$

$$3x + 3 = 2 \times x - 2 \times 1$$

$$3x + 3 = 2x - 2$$

$$3x + 3 - 2x = 2x - 2 - 2x$$

$$x + 3 = -2$$

$$x + 3 - 3 = -2 - 3$$

$$x = -5.$$

La solution de l'équation est -5.

4 Résoudre un problème

Exercice 11.12

Pendant ses loisirs du week-end, Thiago passe les deux cinquièmes de son temps à discuter avec ses amis et le tiers de son temps à s'informer.

Quelle fraction de son temps lui reste-t-il pour jouer en ligne ?

Réponse

Appelons x la fraction du temps de loisirs de Thiago disponible pour le jeu en ligne.

Nous avons : $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + x = 1$.

Réolvons cette équation.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + x = 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + x - \frac{2}{5} = 1 - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3} + x = 1 - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3} + x - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$x = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \times \frac{3 \times 5}{3 \times 5} - \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{1 \times 5}{3 \times 5}$$

$$x = \frac{15}{15} - \frac{6}{15} - \frac{5}{15}$$

$$x = \frac{15 - 6 - 5}{15}$$

$$x = \dots$$

Thiago dispose de $\dots$ de son temps de loisir pour jouer en ligne.

Exercice 11.13

Parmi les employés d'une société :

- $\frac{3}{10}$ habitent à moins de 5 km de leur lieu de travail ;
- $\frac{2}{5}$ habitent à plus de 5 km et à moins de 10 km de leur lieu de travail ;
- $\frac{1}{4}$ habitent à plus de 10 km et à moins de 15 km de leur lieu de travail.

Quel pourcentage des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail ?

Réponse

Soit x la fraction des employés à plus de 15 km de leur lieu de travail.

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + x = 1.$$

Réolvons cette équation.

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + x - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

$$x = 1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

$$x = 1 \times \frac{20}{20} - \frac{3 \times 2}{10 \times 2} - \frac{2 \times 4}{5 \times 4} - \frac{1 \times 5}{4 \times 5}$$

$$x = \frac{20}{20} - \frac{6}{20} - \frac{8}{20} - \frac{5}{20}$$

$$x = \frac{20 - 6 - 8 - 5}{20}$$

$$x = \dots$$

... des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail.

On souhaite écrire cette proportion sous forme d'un pourcentage. Il faut donc ramener le dénominateur à 100.

$$x = \dots$$

En conclusion, ... des employés habitent à plus de 15 km de leur lieu de travail.

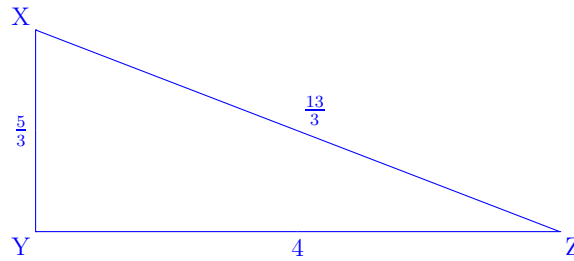
Exercice 11.14

Le triangle XYZ est tel que $XY = \frac{5}{3}$ m, $YZ = 4$ m et $XZ = \frac{13}{3}$ m.

- a. Démontrer que le triangle XYZ est un triangle rectangle.
- b. Calculer l'aire du triangle.
- c. Calculer le périmètre du triangle.

Réponse

Représentons le triangle étudié.



- a. $XY \approx 1,7$ m et $XZ \approx 4,3$ m.

XZ est donc le côté le plus long du triangle XYZ .

Vérifions si l'égalité de Pythagore est vraie dans ce triangle.

– D'une part,

$$(\dots)^2 = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2 = \frac{\dots}{\dots}$$

– D'autre part,

$$(\dots)^2 + (\dots)^2 = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2 + \dots^2 = \frac{\dots}{\dots} + \dots = \frac{\dots}{\dots} + \dots \times \frac{\dots}{\dots}$$

$$(\dots) + (\dots)^2 = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Je constate que $XZ^2 \dots XY^2 + YZ^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle XYZ est $\dots$

- b. Dans un triangle rectangle, on peut prendre l'un des deux petits côtés comme base (choisissons XY) et l'autre comme hauteur (YZ).

Nous pouvons donc calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle XYZ .

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \frac{\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots}}{2} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots \times \dots}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

L'aire du triangle XYZ mesure exactement $\dots$ soit environ $\dots$

- c. Calculons le périmètre $\mathcal{P}$ du triangle XYZ .

$$\mathcal{P} = XY + YZ + XZ$$

$$\mathcal{P} = \dots$$

Le périmètre du triangle XYZ mesure exactement $\dots$

