CHAPITRE 12

GRANDEUR QUOTIENT ET GRANDEUR PRODUIT

1 Vitesse moyenne, distance parcourue et durée d'un trajet

1.1 Calcul de la vitesse, connaissant la distance parcourue et le temps de trajet

Propriété 50 (vitesse moyenne)

On considère un mobile qui parcourt une distance d pendant un temps t avec $d > 0$ et $t > 0$.

Sa **vitesse moyenne** v est le quotient de la distance parcourue par la durée du trajet.

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{d}{t}.$$

Exercice 12.1

Une voiture parcourt 135 km en 3 h.

Calculez sa vitesse moyenne.

Réponse

1. *Méthode 1 : utilisation de la proportionnalité*

   La distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet.

   Les méthodes que nous avons étudiées pour traiter une situation de proportionnalité fonctionneront donc ici.

   Par exemple, nous pouvons regrouper les données du problème dans un tableau de proportionnalité.

Temps de parcours (en h)	...
Distance parcourue (en km)	...

$\times v$

Le coefficient de proportionnalité est la vitesse moyenne du véhicule.
$v = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$
Ce coefficient est donc la valeur de la vitesse moyenne, exprimée en km/h, soit :

$$v = \dots$$

2. *Méthode 2 : utilisation du produit en croix*

   Remarquons que le calcul de la vitesse moyenne est immédiat si l'on connaît la distance d parcourue en une heure.

   Nous allons déterminer cette distance à l'aide d'un produit en croix.

Temps de parcours (en h)	...	1
Distance parcourue (en km)	...	d

   Appliquons le produit en croix.
   $d = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$
   La distance parcourue pendant 1 h est $\dots$

   La vitesse moyenne est donc $\dots$

3. *Méthode 3 : utilisation de la formule*

   La vitesse moyenne v, connaissant la distance parcourue d pendant une durée t est donnée par la formule $v = \dfrac{\dots}{\dots}$
   $v = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$
   On détermine ainsi que la vitesse moyenne de la voiture est $\dots$

1.2 Calcul de la distance parcourue, connaissant la vitesse moyenne et le temps de trajet

Propriété 51 ($d = v \times t$)
On considère un mobile qui effectue un trajet à une vitesse moyenne v pendant un temps t avec $v > 0$ et $t > 0$.

Il parcourt alors une distance d :

$$\text{distance} = \text{vitesse moyenne} \times \text{temps} \qquad \text{ou} \qquad d = v \times t.$$

Exercice 12.2
Une athlète se déplace à la vitesse moyenne de 12,2 km/h pendant 2 h.
Calculez la distance parcourue par cette sportive.

Réponse
Utilisons la formule du cours.
Remplaçons v et t par les valeurs données dans l'égalité $d = v \times t$.

$d = v \times t$
$d = \ \dots \ \times \ \dots$
$d = \ \dots$

L'athlète a parcouru $\dots$

Exercice 12.3
Un robot se déplace à une vitesse constante ($v = 1{,}4\,\text{m/s}$).
On mesure la distance parcourue à différents instants.

Quelles valeurs devrait-on retrouver dans ce tableau ?

durée du trajet (en s)	0,7	1,5	3	5
distance parcourue (en m)	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$\times \dots$

Réponse
À vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle au temps de trajet.
Dans le tableau proposé, le coefficient de proportionnalité est donc la valeur de la vitesse.
Calculons la distance parcourue à différents instants.

- Distance parcourue à $t = 0{,}7\,\text{s}$: $d = \ \dots$
- Distance parcourue à $t = 1{,}5\,\text{s}$: $d = \ \dots$
- Distance parcourue à $t = 3\,\text{s}$: $d = \ \dots$
- Distance parcourue à $t = 5\,\text{s}$: $d = \ \dots$

Nous pouvons maintenant compléter le tableau de proportionnalité.

durée du trajet (en s)	0,7	1,5	3	5
distance parcourue (en m)	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$\times \dots$

1.3 Calcul du temps de trajet, connaissant la vitesse moyenne et la distance parcourue

Propriété 52 ($t = \dfrac{d}{v}$)
On considère un mobile qui parcourt une distance d à une vitesse moyenne v avec $d > 0$ et $v > 0$.

La durée t du trajet parcourue est :

$$\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse moyenne}} \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{d}{v}.$$

Exercice 12.4

Une voiture parcourt 510 km à une vitesse moyenne de 85 km/h.

Calculez le temps mis par la voiture pour parcourir ces 510 km.

Réponse

- *Méthode 1 : avec la formule $d = v \times t$*

  Si l'on connaît « seulement » la formule $d = v \times t$, on peut la considérer comme une équation du premier degré.

  - v et d sont remplacées par leurs valeurs.
  - L'inconnue est le temps t.

  Résolvons donc cette équation.

  $$d = v \times t$$

  $$\begin{aligned} \ldots &= \ldots \times t \\ \frac{\ldots}{\ldots} &= \frac{85 \times t}{85} \\ \ldots &= t \end{aligned}$$

  La solution de l'équation est $\ldots$

  Le trajet dure $\ldots$

- *Méthode 2 : calcul direct*

  Si l'on connaît la formule $t = \dfrac{d}{v}$, rien n'interdit de l'utiliser ici.

  $$t = \frac{d}{v} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

  On conclut là aussi que le trajet dure $\ldots$

2 Grandeurs et unités

Définition 45 (grandeur)

Une **grandeur** est une caractéristique ou une propriété d'un objet mathématique ou physique qui peut être mesurée ou calculée.
À une grandeur on associe une valeur numérique et une unité.

Source [1].

Définition 46 (grandeur mesurable)

Une grandeur est **mesurable** quand on peut définir une égalité et une somme de deux des valeurs qu'elle a pu prendre.

1. Cf `https://lexique.netmath.ca/grandeur/`

Remarque

La longueur d'un segment est une grandeur mesurable que l'on peut exprimer à l'aide de plusieurs unités de mesure : le mètre, le centimètre, etc.

Par contre, une température en degrés Celsius n'est pas une grandeur mesurable.
Il est possible de comparer deux températures en degrés Celsius, de conclure que l'une est égale ou supérieure à l'autre, mais nous ne pouvons pas en faire la somme.

Définition 47 (dimension d'une grandeur)

Si deux grandeurs peuvent s'exprimer en fonction d'une même unité, alors elles appartiennent à une même « famille » appelée **dimension**.

La dimension caractérise la nature de la grandeur et définit les unités utilisables.

Remarque

La *longueur* d'un segment de droite, la largeur d'un rectangle, la hauteur d'une pyramide ou le périmètre d'un cercle sont des grandeurs de même dimension et de même nature : ce sont des longueurs.

Remarque

Le nombre d'individus dans une population ou le nombre d'entités sont des **grandeurs sans dimension**, comme pour le nombre d'élèves d'une classe.

Définition 48 (grandeur de base)

Les **grandeurs de base** sont choisies de façon à ce qu'aucune de ces grandeurs ne puisse être exprimée en fonction des autres.

Définition 49 (Système International de Grandeurs (ISQ))

Le **Système international de grandeurs** ou **ISQ** définit sept grandeurs de base et pour chacune le symbole associé.

Grandeur	Symbole
Longueur	...
Masse	...
Temps	...
Intensité de courant	...
Température thermodynamique	...
Quantité de matière	...
Intensité lumineuse	...

Définition 50 (grandeur dérivée ou grandeur composée)

Une **grandeur dérivée** ou **grandeur composée** est une grandeur que l'on peut définir en fonction des grandeurs de base.

Définition 51 (Système International d'unité (SI))

Le **Système international d'unités** ou **SI** définit, pour chaque grandeur de base, une unité de base ainsi que le symbole de cette unité.

Grandeur de base	unité de base	
Nom	nom	symbole
Longueur	mètre	...
Temps	seconde	...
Masse	kilogramme	...
Courant électrique	ampère	...
Température thermodynamique	kelvin	...
Quantité de matière	mole	...
Intensité lumineuse	candela	...

Remarque

La vitesse moyenne est calculée à partir de deux grandeurs de base :

- la distance parcourue ;
- le temps de trajet.

La vitesse moyenne est donc une grandeur dérivée.

Remarques

Pour la grandeur « longueur », l'unité de base est le mètre (pas le kilomètre).
Pour la grandeur « masse », l'unité de base est le kilogramme et non le gramme, et ce pour des raisons historiques.

3 Grandeur quotient

Définition 52 (grandeur quotient)

Une **grandeur quotient** est une grandeur dérivée qui s'obtient en effectuant le quotient de deux autres grandeurs.

Remarque

Nous avons déjà rencontré la vitesse moyenne v d'un mobile qui s'obtient en fonction de la distance parcourue d et de la durée du trajet t.

$$v = \frac{d}{t}.$$

La vitesse est le quotient de deux grandeurs *de base* : c'est donc une grandeur quotient.
La durée t est bien une grandeur de base.

Remarque

Le fait que l'on puisse écrire $t = \frac{d}{v}$ ne confère pas à la durée de trajet t le statut de grandeur quotient car v n'est pas une grandeur de base.

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

4 Grandeur produit

Définition 53 (grandeur produit)

Une **grandeur produit** s'obtient en effectuant le produit de deux autres grandeurs.

Remarque

En sixième, nous avons vu que l'aire d'un rectangle est donnée par le produit de sa longueur et de sa largeur.
La longueur et la largeur du rectangle sont des longueurs de base, et de surcroît de même nature. Ce sont des « longueurs ».
L'aire d'un rectangle est donc une grandeur ...

5 conversion d'heure décimale

5.1 Définitions

Définition 54 (heure décimale)

Une heure peut être écrite et décomposée de différentes façons.

- L'**heure sexagésimale** est divisée en 60 minutes, puis chaque minute en soixante secondes.
- L'**heure décimale** est divisée en dixièmes d'heures, puis en centièmes d'heure, etc.

Remarque

L'heure sexagésimale est utilisée dans la vie courante, pour indiquer la valeur d'une heure, pour effectuer une addition (temps cumulés) ou une soustraction d'heures (durée d'un événement).

L'écriture en heure décimale peut être nécessaire lorsqu'il faut multiplier des heures.

Exercice 12.5

Dans une course par équipes, quatre athlètes réalisent exactement le même temps.
L'équipe est créditée d'un temps cumulé de 5 h.

Quel temps a réalisé chaque athlète ?

Réponse

$\ldots \div \ldots = \ldots$

Chaque athlète a couru en $\ldots$

Nous avons effectué la division *décimale* de $\ldots$ par $\ldots$; le quotient obtenu est donc une heure $\ldots$

Le temps de 1,25 h ne doit pas être confondu (ce serait une faute) avec 1 h 25 mn.

Pour convertir 0,25 h en minutes, réalisons un tableau de proportionnalité.

$\div 60$	Nombre d'heures	1	$\ldots$	$\times 60$
	Nombres de minutes	$\ldots$	t	

Nous pouvons calculer le nombre de minutes correspondant à t de deux façons.

- Calculons explicitement et utilisons le coefficient de proportionnalité.
  $c = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$
  $t = 0,25 \times c = 0,25 \times \ldots = \ldots$
- Utilisons le produit en croix.
  $t = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots} = \ldots$

Un temps de 0,25 h correspond à $\ldots$ min.

Chaque athlète a donc couru en $\ldots$

Propriété 53 (conversion en heure décimale)

Pour convertir une heure décimale t_{dec} en une heure exprimée en minutes t_{min} ou inversement, on utilise la formule :

$$t_{min} = 60 \times t_{dec}$$

$$(\text{temps en minutes}) = 60 \times (\text{temps en heures décimales}).$$

Exercice 12.6

1. Convertissez 24 min en heures décimales.
2. Convertissez 0,18 h en minutes.
3. Convertissez 7,30 h en heures décimales.
4. Convertissez 3,8 h en heures et en minutes.
5. À vitesse constante, il faut 1h 15 min pour parcourir une distance. Combien de temps faut-il pour parcourir 10 fois cette distance ?

Réponse

1. $\dfrac{24}{60} = \ \ldots$

   Donc 24 mn = … h.

2. $0,18 \times 60 = \ \ldots$

   Donc 0,18 h représentent … min.

   Convertissons 0,8 min en x secondes à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

Nombre de minutes	1	…
Nombre de secondes	…	x

   $x = \dfrac{\ldots \times \ldots}{\ldots} = \ \ldots$

   Donc 0,8 min = … s.

   Finalement, 0,18 h représentent … min … s.

3. 7,30 h = 7 h + … h = 7 h + 60 × … min = 7 h … min.

   Donc 7,30 heures représentent 7 heures et … minutes.

4. 3,8 h = 3 h + … h = 3 h + 60 × … min = 3 h … min.

   Donc 3,8 heures représentent 3 heures et … minutes.

5. Pour trouver le temps correspondant à 10 fois 1h 15 min il faut :
   - d'abord convertir 1h 15 min en heures décimales ;
   - puis multiplier ce temps par 10.

   1 h15 min = 1 h + $\dfrac{\ldots}{\ldots}$h = 1 h + … h = … h.

   $10 \times \ \ldots \ = \ \ldots$

   La durée totale est … h soit 12 h … min.

5.2 Conversions de vitesse (km/h et m/s)

Remarque

Selon le choix de l'unité de longueur et de l'unité de temps, on exprime couramment une vitesse :

- soit en kilomètres par heure (km/h) ;
- soit en mètres par seconde (m/s).

Si la distance est exprimée en mètres (m) et la durée en secondes (s), la vitesse l'est en m/s.

Si la distance est exprimée en kilomètres (km) et la durée en heures (h), la vitesse l'est en km/h.

Exercice 12.7
Convertissez 1 m/s en km/h.

Réponse $1\,\text{m/s} = \dfrac{1\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \dfrac{\ldots\ \times 1\ \text{m}}{\ldots\ \times 1\ \text{s}} = \dfrac{\ldots\ \ \text{m}}{\ldots\ \ \text{s}} = \dfrac{\ldots\ \ \text{km}}{\ldots\ \ \text{h}} = \ \ldots\ \ \text{km/h}.$

Propriété 54 (conversion en km/h ou en m/s)
Pour convertir une vitesse $v_{km/h}$ exprimée en km/h en une vitesse $v_{m/s}$ exprimée en m/s ou inversement, on utilise la formule :

$$v_{km/h} = 3,6 \times v_{m/s}.$$

5.3 vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités

Exercice 12.8
Donald veut calculer la vitesse v (en m/s) d'un mobile qui parcourt une distance d (en m) pendant un temps t (en s).
Il pense que la formule qu'il doit utiliser est $v = d \times t$.

En examinant les unités, montrez-lui qu'il a tort.

Réponse
Examinons la formule proposée :

- À gauche du signe égal, la vitesse est exprimée en ...
- À droite du signe égal, le produit de la distance par le temps est exprimé en ...

Avec une notation informelle et abrégée, on pourrait résumer ainsi ces observations sur les unités.

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \text{m} \times s.$$

La formule proposée par Donald ne peut donc par être correcte.

5.4 Conversion dans un calcul de vitesse moyenne

Exercice 12.9
Calculez la vitesse en km/h d'un marcheur qui parcourt 6 300 m en 45 mn.

Réponse

- On précise la formule à appliquer.
  $v =\ \ldots\ .$
- On précise les unités : pour obtenir une vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en kilomètres et la durée en heures.
- On convertit les distances en kilomètres.
  $6\,300\,\text{m} =\ \ \ldots$

– On convertit le temps en heure.

  Il y a 60 min dans une heure donc, en utilisant le produit en croix :

  $45\,\text{mn} = \ \ldots$

– On calcule la vitesse :

  $v = \ \ldots$

La vitesse du marcheur est $\ \ \ldots$

5.5 Conversion dans un calcul de distance parcourue

Exercice 12.10
Calculez la distance parcourue (en m) par une voiture qui roule à une vitesse moyenne de 126 km/h pendant 15 s.

Réponse

– On précise la formuler à appliquer.

  $d = \ \ldots$

– On précise les unités : pour obtenir une distance en m, il faut exprimer la vitesse en m/s et la durée en s.

– On convertit la vitesse :
  $126\,\text{km/h} = \ \ldots$

– On calcule la distance parcourue :
  $d = \ \ldots$

La voiture a parcouru $\ \ldots$

5.6 Conversion dans un calcul de temps de parcours

Exercice 12.11
Calculez le temps (en s) mis par un coureur pour parcourir 210 m à une vitesse de 10,8 km/h.
On donnera le résultat en secondes, arrondi à l'unité.

Réponse

– On précise la formuler à appliquer.

  $t = \ \ldots$

– On précise les unités : pour obtenir un temps en s, il faut exprimer la distance en m et la vitesse en m/s.

– On convertit la vitesse.
  $10{,}8\,\text{km}\,\text{h}^{-1} = \ \ldots$

– On calcule le temps :
  $t = \ \ldots$

La course a duré $\ \ldots$

6 Dépendance entre deux grandeurs et notion de fonction

6.1 définition

Définition 55 (fonction)
On appelle **fonction** un procédé qui, à un nombre x, fait correspondre un nombre y.
On notera :

$$f : x \mapsto y.$$

En pratique, le procédé qui permet d'obtenir le second nombre *en fonction* du premier pourra faire appel à un tableau de valeurs, à un graphique ou à une formule.

6.2 Avec un tableau de valeurs

Exercice 12.12
Considérons une voiture qui démarre au moment où l'on déclenche un chronomètre.

Temps de parcours (en s)	0	1	2	3	4	5	6
Vitesse atteinte (en km/h)	0	4	13	28	43	55	63

On mesure ainsi la vitesse atteinte *en fonction* du temps écoulé depuis le démarrage.
On peut alors définir une fonction, que nous appellerons f et qui, au temps écoulé t, fait correspondre la vitesse atteinte, notée v.

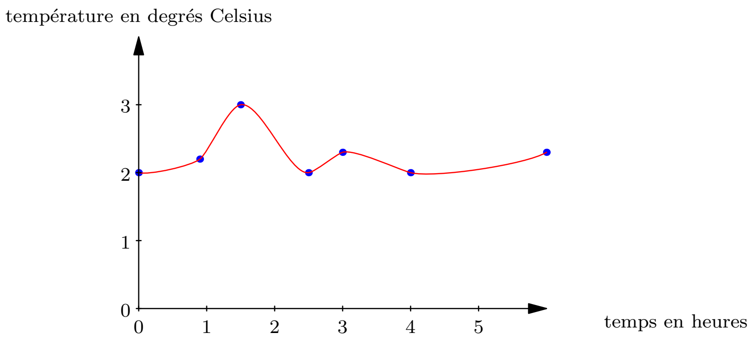
$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots$$

La vitesse atteinte au bout de 3 s est ...
On pourra écrire :

$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots$$

6.3 Avec un graphique

Exercice 12.13
Au cours d'une expérience en sciences physiques, un dispositif électronique relève la température θ d'un corps (en degrés Celsius) en fonction du temps t (en heures).



Puisque la température varie *en fonction* du temps, définissons une fonction f qui, à un temps t mesuré dans l'expérience, fait correspondre la température θ.

$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots$$

Rappelons qu'une fonction est un procédé qui, à un nombre, associe un autre nombre. Ici, le procédé utilisé consiste à :

- repérer sur l'axe des abscisses (horizontal) le temps qui nous intéresse, soit t ;
- repérer sur l'axe des ordonnées (vertical) la température correspondante, soit θ.

Par exemple, au début de l'expérience, à $t = 0\,\text{h}$, la température est de $\ \ldots$
On a donc :

$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots$$

6.4 Avec une formule

Exercice 12.14

Nous savons que le côté d'un carré et l'aire de ce carré sont deux grandeurs liées.
De plus, nous connaissons la formule qui permet de calculer l'aire *en fonction* du côté.
Nous pouvons donc définir une fonction f qui, au côté c du carré, fait correspondre son aire.

$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots \ \times \ \ldots$$

Calculons l'aire d'un carré de 4 mètres de côté.
$4 \times 4 = \ \ldots$
Cette aire mesure donc $\ \ldots$
Nous pouvons donc écrire :

$$f : \ \ldots \ \mapsto \ \ldots$$