

1 Puissances positives

Définition 56 (puissance positive d'un nombre relatif)

Soient a un nombre relatif et n un entier positif.

Le produit de n facteurs tous égaux à a est noté a^n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».

a^2 se lit « a au carré ».

a^3 se lit « a au cube ».

n est l'**exposant** et a^n est une **puissance** de a .

Notation

On remarque que : $a^1 = a$.

Exercice 14.1

Calculez chaque expression.

a. $17^1 = \dots$

c. $(-3)^2 = \dots$

b. $2^4 = \dots$

d. $-(3)^2 = \dots$



Veillez à ne pas confondre ces deux situations !

Étudiez bien la différence entre $(-3)^2$ et $-(3)^2$.

Remarque

Les puissances d'exposant pair d'un nombre négatif sont toujours positives.

En pratique, il n'est pas utile d'énoncer une nouvelle règle pour les puissances d'exposant impair d'un nombre négatif : le signe du produit est déterminé par la règle des signes d'un produit.

Exercice 14.2

Déterminez le signe des expressions suivantes.

a. $(-15)^8$.

b. $(-37)^9$.

c. $(+11)^{23}$.

Réponse

a. $(-15)^8 = (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15)$

Ce produit comporte un nombre ... de facteurs négatifs. Il est donc ...

b. $(-37)^9 = (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37) \times (-37)$

Ce produit comporte un nombre ... de facteurs négatifs. Il est donc ...

c. L'expression $(+11)^{23}$ ne comporte aucun facteur négatif : elle est donc ...

2 Puissances négatives**Définition 57 (puissance négative d'un nombre relatif)**

Soient a un nombre relatif avec $a \neq 0$ et n un entier positif.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}} \quad (\text{pour } a \neq 0).$$

Propriété 55 (puissance négative, inverse d'un nombre)

Soient a est un nombre relatif et n un entier positif.

Le nombre a^{-1} est l'inverse de a .

Le nombre a^{-n} est l'inverse de a^n .

Exercice 14.3

Écrivez les expressions suivantes sous forme de puissance d'un nombre premier :

a. $\frac{1}{17} = \dots$

c. $\frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dots$

b. $\frac{1}{5^3} = \dots$

d. $\frac{-1}{9} = \dots$

3 Puissances de 10**Propriété 56 (puissances de 10)**

Soit n un nombre entier.

$$10^n = \underbrace{1\,000\dots 0000}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,000\dots 0000}_{n \text{ zéros}}1.$$

10^n s'écrit avec un « 1 » suivi de n zéros.

10^{-n} s'écrit « 0,00...01 », avec donc n zéros en comptant celui qui précède la virgule.

Exercice 14.4

Écrivez sous forme d'une puissance de 10 les nombres suivants :

a. 100.

b. 100 000 000 000.

c. 0,000 1.

Réponse

a. Le nombre 100 comporte un « 1 » suivi de deux « 0 ».

Donc $100 = \dots$

b. Le nombre 100 000 000 000 comporte un « 1 » suivi de onze « 0 ».

Donc $100\,000\,000\,000 = \dots$

c. Le nombre en écriture décimale 0,000 1 comporte un « 1 » précédé de quatre « 0 », en comptant celui qui précède la virgule.

donc $0,0001 = \dots$

4 Calculer avec les puissances

Il est parfois possible de simplifier les calculs avec les puissances.

Propriété 57 (addition des puissances)

On peut écrire le produit de deux puissances sous la forme d'une puissance :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}.$$

$$10^3 \times 10^2 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10}_{2 \text{ facteurs}} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{3+2=5 \text{ facteurs}} = 10^5.$$

Exercice 14.5

Calculez les expressions suivantes :

- $3^2 \times 3^4 = \dots$
- $10^{30} \times 10^{10} = \dots$
- $10^5 \times 10^4 \times 10^2 = \dots$
- $7^2 \times 7^5 \times 7^2 \times 7^4 = \dots$

Propriété 58 (soustraction de puissances)

On peut écrire le quotient de deux puissances sous la forme d'une puissance :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}.$$

$$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times \cancel{10} \times \cancel{10}}{\cancel{10} \times \cancel{10}} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 10^{5-2}.$$

Exercice 14.6

Calculez les expressions suivantes :

- $5^6 \times 5^{-3} = \dots$
- $\frac{3^7}{3^5} = \dots$
- $\frac{10^2}{10^4} = \dots$
- $100\,000\,000\,000\,000 \times 0,000\,001 = \dots$

Propriété 59 (a puissance zéro)

Soit a un nombre non nul. Par convention :

$$a^0 = 1.$$

Remarque

Soient a un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

En essayant de calculer $\frac{a^n}{a^n}$ de deux façons différentes, nous devrions trouver le même résultat.

- Premier calcul : sachant que le quotient d'un nombre non nul par lui-même est toujours égal à 1, on a immédiatement :

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

- Second calcul : en utilisant la propriété de soustraction des puissances, on obtient :

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

On comparant ces deux égalités des puissances, on constate que la convention s'applique :

$$a^0 = 1.$$

Il faudra attendre le cours de mathématiques de terminale pour démontrer rigoureusement cette propriété, dans un cadre plus large.

Propriété 60 (puissances identiques de deux nombres relatifs)

Soient a un nombre relatif non nul et n un nombre entier.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n.$$

$$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6.$$

Exercice 14.7

Écrivez les expressions suivantes sous la forme x^n en détaillant vos calculs.

a. $2^4 \times 7^4 = \dots$

b. $5^{100} \times 2^{100} = \dots$

c. $25^5 \times 4^5 = 5 \dots$

Propriété 61 (puissances de puissances)

$$(a^n)^p = a^{n \times p}.$$

$$(10^4)^3 = 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10^{4+4+4} = 10^{12} = 10^{4 \times 3}.$$

Exercice 14.8

Écrivez les expressions suivantes sous la forme de puissances de 10 :

a. $(10^2)^5 = \dots$

b. $(10^{10})^{10} = \dots$

c. $(\frac{1}{10^3})^7 = \dots$

d. $(10^{-6})^2 = \dots$

Propriété 62 (priorités opératoires)

Dans le calcul d'une expression, on effectue dans cet ordre :

- les calculs entre parenthèses ;
- les puissances ;
- les multiplications et les divisions ;
- les additions et les soustractions.

Exercice 14.9

Calculez les expressions suivantes.

A = $(2 - 6) \times 3^2 + 5$.

B = $10^5 + 10^6 \times 10^{-3} + 10^5 \times 10^{-7}$.

Réponse

A = $(2 - 6) \times 3^2 + 5$

= \dots

= \dots

= $\dots = \dots$

B = $10^5 + 10^6 \times 10^{-3} + 10^5 \times 10^{-7}$

= \dots

= \dots

= \dots

= \dots

5 La notation scientifique

Définition 58 (notation scientifique)

Il existe une manière unique d'écrire d'un nombre décimal positif sous la forme :

$$a \times 10^n.$$

- a est un nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leq a < 10$).
- n est un entier relatif.

Cette écriture est appelée **notation scientifique** ou **écriture scientifique**.

Exercice 14.10

Calculez les expressions suivantes.

$$A = 370\,000 = \dots$$

$$B = 42\,310 = \dots$$

$$C = 5,78 = \dots$$

$$D = 0,18 = \dots$$

$$E = 0,01 = \dots$$

$$F = 1\,000\,000\,000\,000 = \dots$$

$$G = 0,000\,000\,001 = \dots$$

$$H = -38,2 = \dots$$

6 Ordre de grandeur

Définition 59 (ordre de grandeur)

Si $a \times 10^n$ est l'écriture scientifique d'un nombre, alors 10^n est un **ordre de grandeur** de ce nombre.

Exercice 14.11

Donnez un ordre de grandeur, sous forme d'une puissance de 10, des nombres suivants :

a. $98,895 \approx \dots$

d. $98,895 \approx \dots$

b. $97\,012\,654 \approx \dots$

e. $979\,321\,569,2 \approx \dots$

c. $0,001\,12 \approx \dots$

f. $0,098 \approx \dots$

Exercice 14.12

Un navire de type port-conteneur transporte 197 204 conteneurs pleins pesant chacune un moyenne 30 300 kg.

Sans calculatrice, donnez un ordre de grandeur de la masse totale des conteneurs sous la forme d'une puissance de 10.

Réponse

Je calcule un ordre de grandeur de la masse totale des conteneurs :

$197\,204 \times 30\,300 \text{ kg} \approx \dots\dots\dots$

La masse totale des conteneurs mesure environ ...

7 Préfixes

En classe de quatrième, vous devez connaître les préfixes suivants.

	exposants > 1					exposants < 1				
Préfixe	giga	méga	kilo	hecto	deca	deci	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	K	h	da	d	c	m	μ	n
Puissance	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exercice 14.13

Effectuez les conversions suivantes :

- a. 3,7 GW en watts : ...
- b. 50 mg en kilogrammes : ...
- c. 5 μm en mètres : ...
- d. 3,7 Mo en octets : ...