CHAPITRE 7

THÉORÈME DE PYTHAGORE

1 Racines carrées

Définition 32 (racine carrée)

Soit x un nombre positif.
La **racine carrée** de x est le nombre positif dont le carré est x.
La racine carrée de x est notée $\sqrt{x}$.

Exercice 7.1

1. Nous savons que $5 \times 5 = 25$ et :
   - le nombre 25 est le carré de 5 et $25 = \ \ldots$
   - le nombre 5 est la racine carrée de 25 et $5 = \ \ldots$
2. La racine carrée de 48 est le nombre dont le carré est 48 ; elle est notée $\ldots$

Définition 33 (carré parfait)

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier.

Propriété 32 (racine carrée de 0 et de 1)

La racine carrée de 0 est 0.
La racine carrée de 1 est 1.

Remarque

Le nombre 0 est sa propre racine carrée : $0 \times 0 = 0$.
De même : $1 \times 1 = 1$.

Propriété 33 (racine carrée d'un carré parfait)
Si a est un carré parfait, alors la racine carrée de a est un entier.

Remarque
Les carrés des 12 premiers nombres entiers positifs sont à connaître par cœur.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	$\dots$	$\dots$

Propriété 34 (lien entre carré et racine carrée)
Soit a un nombre positif ou nul.

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2} = a.$$

Exercice 7.2
Calculez, sans calculatrice, en utilisant une propriété :

a. $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \ \dots$

b. $\left(\sqrt{17863}\right)^2 = \ \dots$

c. $\left(\sqrt{34,56}\right)^2 = \ \dots$

2 Le théorème de Pythagore

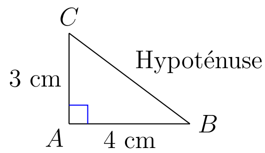
Théorème 2 (théorème de Pythagore)
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

3 Calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle

Exercice 7.3

Calculez la longueur de l'hypoténuse du triangle ABC, en donnant une valeur approchée au centième si nécessaire.



Réponse

Le triangle ABC est rectangle en ... Donc, d'après le théorème de Pythagore :

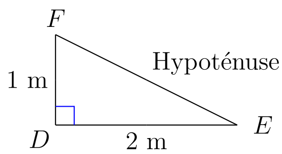
$(\dots)^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$

$BC^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$
$BC^2 = \dots + \dots$
$BC^2 = \dots$
$BC = \sqrt{\dots}$
$BC = \dots$

Le côté [BC] mesure ...

Exercice 7.4

Calculez la longueur de l'hypoténuse du triangle DEF, en donnant une valeur approchée au centième si nécessaire :



Réponse

Le triangle DEF est rectangle en ... Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$(\dots)^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$

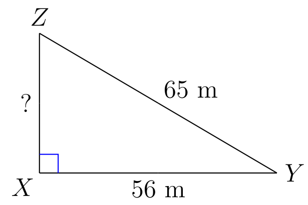
$EF^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$
$EF^2 = \dots + \dots$
$EF^2 = \dots$
$EF = \dots$

La valeur exacte de la longueur EF est ...

La calculatrice nous permet d'obtenir une valeur approchée : $EF \approx \dots$

4 Calculer la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit

Exercice 7.5
Calculez la longueur du côté [XZ] dans le triangle ci-dessous.



Réponse
Le triangle XYZ est rectangle en $\ldots$

Donc, d'après le théorème de Pythagore :

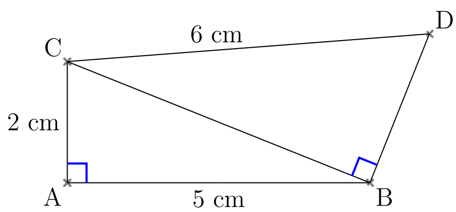
$(\ \ldots\ )^2 = (\ \ldots\ )^2 + (\ \ldots\ )^2$

$(\ \ldots\ )^2 = (\ \ldots\ )^2 + (\ \ldots\ )^2$
$\ldots\ = 3136 + XZ^2$
$4\,225 - 3\,136 = 3\,136 + XZ^2 - \ \ldots$
$\ldots\ = XZ^2$
$XZ = \sqrt{\ldots}$
$XZ = \ \ldots$

la longueur XZ est égale à $\ldots$

5 Calculer une longueur dans une situation plus complexe

Exercice 7.6
Calculez la longueur BD, en donnant la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.



Réponse
Première étape : calcul de la longueur BC.
Plaçons-nous dans le triangle ABC, qui est rectangle en $\ldots$
Nous pouvons donc appliquer le théorème de Pythagore.

$\ldots\ = \ \ldots\ + \ \ldots$

$BC^2 = (\ \ldots\ )^2 + (\ \ldots\ )^2$
$BC^2 = \ \ldots\ + \ \ldots$
$BC^2 = \ \ldots$

Seconde étape : calcul de la longueur BD.
Plaçons-nous cette fois dans le triangle BCD, qui est rectangle en $\ldots$
En appliquant le théorème de Pythagore, il vient :
$(\ \ldots\ )^2 = (\ \ldots\ )^2 + (\ \ldots\ )^2$
$(\ \ldots\ )^2 = (\ \ldots\ ) + (\ \ldots\ )^2$
$\ldots\ = \ \ldots\ + BD^2$

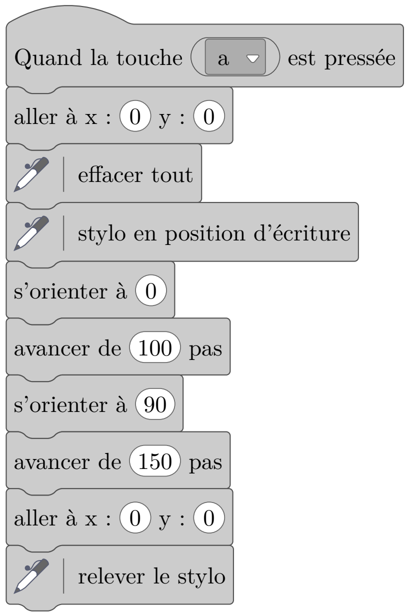
$\ldots - \ldots = \ldots + BD^2 - \ldots$
$\ldots = BD^2$
$BD = \ldots$

La valeur exacte de la longueur BD est $\ldots$
À l'aide de la calculatrice, nous déterminons que $BD \approx \ldots$

6 Programmer un calcul

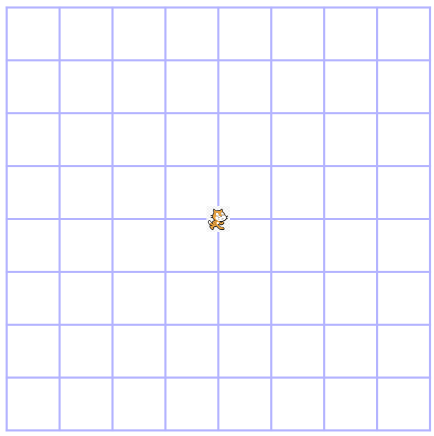
Exercice 7.7

On exécute le programme Scratch ci-contre.



1. Tracez le dessin formé par le lutin dans le quadrillage ci-dessous ; le chat est placé au centre du repère, et 1 carreau représente 50 pas.
2. Calculez la longueur du dernier segment de droite tracé, un considérant qu'un pas représente 3m.
   - Valeur exacte.
   - Valeur approchée au centimètre près.

Réponse



1. Le programme dessine un triangle rectangle dont les deux petits côtés mesurent $\ldots$ et $\ldots$ pas (voir ci-contre).

   Le dernier segment tracé constitue l'hypoténuse du triangle.
2. Convertis en mètres, les deux petits côtés mesurent :
   - $\ldots \times \ldots = \ldots$ m.
   - $\ldots \times \ldots = \ldots$ m.

   Dans ce triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet donc d'écrire :

   $(\ldots)^2(\ldots)^2 = (\ldots)^2$
   Et donc :

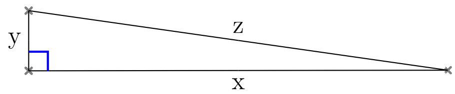
   ....

   ....

   Le dernier segment tracé mesure exactement $\ldots$ m et approximativement $\ldots$ m .

Exercice 7.8

Sachant que $y = 1\,\text{cm}$ et $z = 7\,\text{cm}$, programmez avec Scratch le calcul de x afin d'obtenir une valeur approchée de x au centième près.

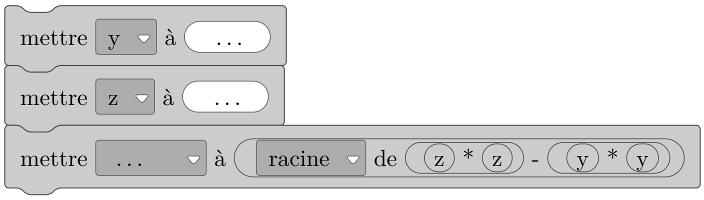


Réponse

Les longueurs x, y et z sont les trois côtés d'un triangle rectangle. La longueur z est celle de l'hypoténuse, et d'après le théorème de Pythagore :

$$(\ \dots\ )^2 = (\ \dots\ )^2 + (\ \dots\ )^2$$

Avec Scratch, nous pouvons créer trois variables x, y et z et calculer x avec le script suivant.



L'afficheur de la variable x indique 5,916 08.
Nous pouvons en déduire une valeur approchée de x au centième : $x \approx\ \dots$

7 Les triplets pythagoriciens

Définition 34 (triplet pythagoricien)

On appelle **Triplet pythagoricien** un ensemble de trois entiers positifs qui vérifient l'égalité de Pythagore.

Exemple

Les triplets $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ et $(8, 15, 17)$ sont des triplets pythagoriciens.