

CHAPITRE 5

FRACTIONS : COMPARER, ENCADRER ET MULTIPLIER PAR UN NOMBRE

1 Notion de proportion

Définition 17 (proportion)

Supposons qu'une classe comporte 30 élèves dont 17 filles.

La **proportion** de filles peut s'exprimer par la fraction $\frac{17}{30}$.

Exercice 5.1

Complétez les phrases suivantes :

1. Un panier comporte 12 fruits dont 7 pommes. La proportion de pommes dans le panier est ...
2. Dans sa trousse, un élève range 7 stylos dont deux sont bleus. La proportion de stylos bleus dans la trousse est ...

2 Comparer des fractions

2.1 Comparer deux fractions de même dénominateur

Propriété 24 (comparer deux fractions de même dénominateur)

Soient trois nombres a , b et c avec $b > 0$.

Si $a > c$ alors $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$.

En d'autres termes, si deux fractions ont le même dénominateur positif, la fraction qui a le plus grand numérateur est la fraction la plus grande.

Exercice 5.2

Un premier panier contient 40 fraises dont 11 jugées trop mûres.

Un second panier contient 40 cerises dont 13 trop mûres.

Quel panier comporte la plus grande proportion de fruits trop mûrs ?

Réponse

La proportion de fruits trop mûrs dans le premier panier est ...

La proportion de fruits trop mûrs dans le second panier est ...

Il nous faut comparer les fractions ... et ...

Ces deux fractions ont le même dénominateur (...) et $11 < 13$, donc $\frac{11}{40} \dots \frac{13}{40}$.

La proportion de fruits mûrs est la plus importante dans le ... panier.

2.2 Comparer deux fractions de dénominateur différents**Méthode (comparer deux fractions dont les dénominateurs sont différents)**

Pour comparer deux fractions dont les dénominateurs sont différents, on peut tenter de les écrire avec un même dénominateur.

Exercice 5.3

Comparez les fractions $\frac{35}{20}$ et $\frac{12}{8}$.

Réponse

Essayons de simplifier ces deux fractions et de les ramener au même dénominateur :

$$- \text{ Pour la première : } \frac{35}{20} = \frac{7 \times \cancel{5}}{4 \times \cancel{5}} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$- \text{ Pour la seconde : } \frac{12}{8} = \frac{6 \times \cancel{2}}{6 \times \cancel{2}} = \frac{\dots}{\dots}$$

Les fractions $\frac{7}{4}$ et $\frac{6}{4}$ possèdent le même dénominateur et $7 > 6$, donc $\frac{7}{4} \dots \frac{6}{4}$.

Par conséquent, $\frac{35}{20} \dots \frac{12}{8}$.

2.3 Comparer deux fractions de même numérateur**Propriété 25 (comparer deux fractions de même numérateur)**

Soient trois nombres r , s et t avec $s > 0$ et $t > 0$.

Si $s < t$ alors $\frac{r}{s} > \frac{r}{t}$.

En d'autres termes, si deux fractions ont le même numérateur positif, la fraction qui a le plus petit dénominateur est la fraction la plus grande.

Exercice 5.4

Comparez les fractions $\frac{89}{51}$ et $\frac{89}{53}$.

Réponse

Ces deux fractions ont le même numérateur (...) et $51 < 53$, donc $\frac{89}{51} > \frac{89}{53}$.

2.4 Comparer une fraction avec 1**Propriété 26**

Soient a et b deux nombres avec $b > 0$.

- Si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$.
- Si $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$.
- Si $a = b$ alors $\frac{a}{b} = 1$.

Exercice 5.5

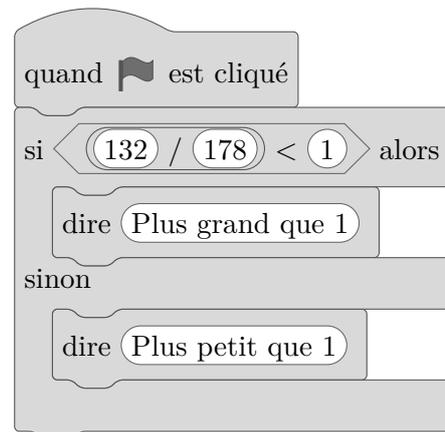
Dans le programme Scratch ci-contre, lorsque l'utilisateur clique sur le drapeau vert, le lutin dit-il « Plus grand que 1 » ou « Plus petit que 1 » ?

Réponse

Le test compare la fraction $\frac{132}{178}$ avec 1.

Comme $132 < 178$, on a $\frac{132}{178} < 1$.

Par conséquent, le lutin dit ...

**2.5 Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs****Notation**

Le symbole « \geq » signifie « supérieur ou égal ».

Le symbole « \leq » signifie « inférieur ou égal ».

Propriété 27 (encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs)

Soient a et b deux entiers naturels avec $b > 0$.

Si q est le quotient de la division euclidienne de a par b , alors :

$$q \leq \frac{a}{b} < q + 1.$$

Exercice 5.6

Encadrez la fraction $\frac{1437}{8}$ par deux entiers consécutifs.

Réponse

Effectuons la division euclidienne de 1437 par 8, ci-contre.

$$1437 = 8 \times 179 + 5.$$

Le quotient de cette division euclidienne est Par conséquent :

$$\dots < \frac{1437}{8} < \dots$$

$$\begin{array}{r|l} 1437 & 8 \\ 63 & 179 \\ 77 & \\ 5 & \end{array}$$

3 Multiplier une quantité par une fraction**Propriété 28**

Soient a , b et c trois nombres avec $c \neq 0$.

Pour multiplier le nombre a par la fraction $\frac{b}{c}$:

- On multiplie a par le numérateur de la fraction.
- On conserve le dénominateur.

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}.$$

Définition 18 (prendre une fraction d'une grandeur)

Prendre une fraction d'une quantité (d'une grandeur), c'est multiplier cette quantité par la fraction.

Méthode

Pour prendre une fraction d'une quantité, on peut choisir entre trois façons d'effectuer le calcul nécessaire.

En général, on choisit la façon la plus simple.

Exercice 5.7

Pour arroser un jardin, on utilise 7 huitièmes d'un tonneau de 80 L. Pour calculer la quantité d'eau utilisée, on peut effectuer le calcul par trois façons méthode différentes (A), (B) et (C) :

Méthode	Calcul en ligne	Opérations posées
(A)	$(\frac{7}{8}) \times 80 = 0,875 \times 80 = 70$	$\begin{array}{r} 7 \\ - 0 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ \hline 0,875 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 0,875 \\ 80 \\ \hline 7000 \\ 7000 \\ \hline 70.000 \end{array}$
(B)	$\frac{(7 \times 80)}{8} = \frac{560}{8} = 70$	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 80 \\ \hline 560 \\ \hline 560 \end{array}$ $\begin{array}{r} 560 \\ - 560 \\ \hline 00 \\ - 00 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ \hline 70 \end{array}$
(C)	$7 \times (\frac{80}{8}) = 7 \times 10 = 70$	$\begin{array}{r} 80 \\ - 8 \\ \hline 00 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 10 \\ 8 \\ \hline 80 \end{array}$

Dans cet exemple, les calculs sont plus simples avec la troisième méthode.

Exercice 5.8

Calculez :

- a. $\frac{2}{3}$ de 27 €. b. $\frac{5}{6}$ de 60 m. c. $\frac{6}{10}$ de 11 kg. d. $\frac{4}{7}$ de 28 élèves.

Réponse

- a.
 $\frac{2}{3}$ de 27 € représentent ...
- b.
 $\frac{5}{6}$ de 60 m représentent ...
- c.
 $\frac{6}{10}$ de 11 kg représentent ...
- d.
 $\frac{4}{7}$ de 28 élèves représentent ...

Exercice 5.9

Amanda conduit une camionnette dont le réservoir de 75 L est rempli au $\frac{2}{13}$.
Un voyant rouge s'allume lorsque le réservoir contient moins de 10 L.

Est-ce le cas ?

Réponse

Je calcule la quantité d'essence dans le réservoir : ...

Cette quantité est ... à 10 L donc le voyant ...

Exercice 5.10

Au bord d'une rivière, un pêcheur a capturé 45 poissons : des perches, des carpes et des goujons.

On dénombre $\frac{2}{9}$ de perches et $\frac{3}{5}$ de carpes.

Combien le pêcheur a-t-il capturé de poissons de chaque type ?

Réponse

Je calcule le nombre de carpes :

On dénombre ... carpes.

Je calcule le nombre de perches :

On dénombre ... perches.

Je calcule par soustraction le nombre de goujons : $45 - \dots - \dots = \dots$

On dénombre ... goujons.