CHAPITRE 19

PARALLÉLOGRAMMES

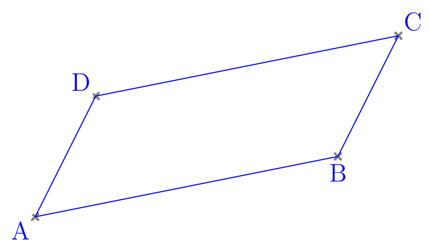
1 Définition et construction

Définition 59 (parallélogramme)
Un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux est un **parallélogramme**.

Exercice 19.1

Dans la figure ci-contre, on a :

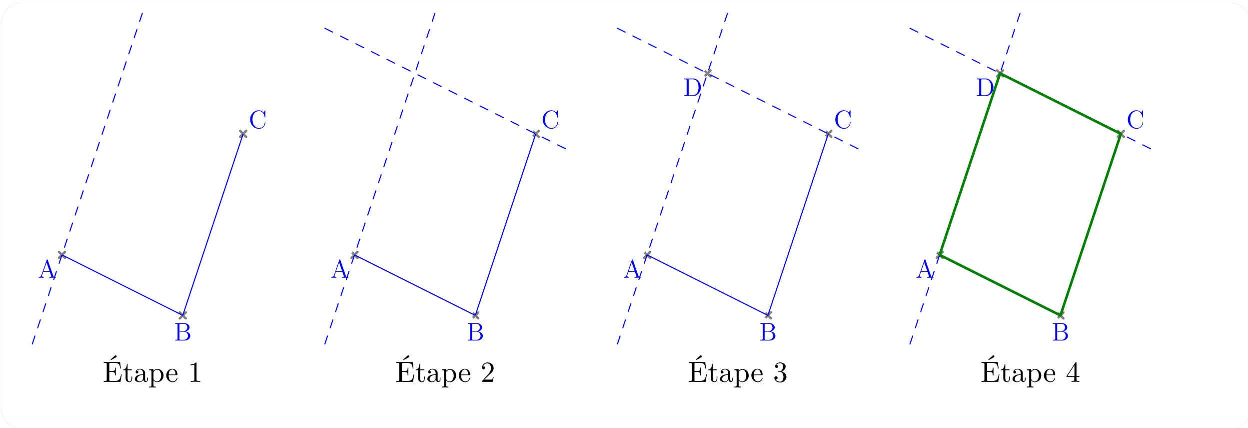
$$\begin{cases}(AB)// \dots \\ (AD)// \dots\end{cases}$$



Le quadrilatère $ABCD$ est alors un ...

Méthode (Construire un parallélogramme avec une règle et une équerre)
Soient A, B et C trois points non alignés. Le quadrilatère $ABCD$ est alors un parallélogramme.

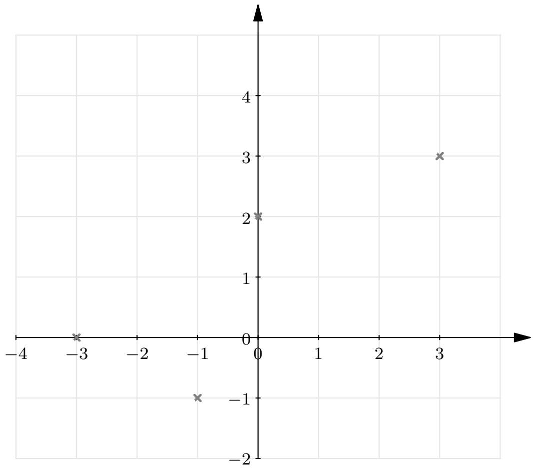
- Étape 1 : Tracer la droite passant par C et perpendiculaire à (AB).
- Étape 2 : Tracer la droite passant par C et perpendiculaire à (BC).
- Étape 3 : Placer un point D à l'intersection de ces deux droites.
- Étape 4 : Tracer le parallélogramme $ABCD$.



Exercice 19.2

Dans la figure ci-contre :

1. Placez les points $A(-3;0)$, $B(-1;-1)$, $C(0;2)$ et $E(3;3)$.
2. Placez le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Placez le point F tel que $BCFE$ soit un parallélogramme.
4. Placez le point G tel que $CEGD$ soit un parallélogramme.
5. Donnez les coordonnées des points D, E et F :
   $D(\ldots;\ldots)$, $F(\ldots;\ldots)$ et $E(\ldots;\ldots)$.



2 propriété des parallélogrammes

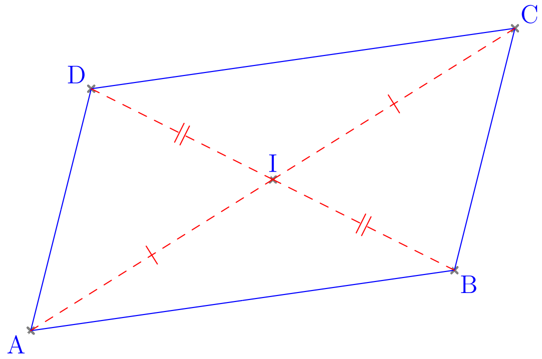
Propriété 62 (parallélogramme - diagonales)
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Définition 60 (centre de symétrie)
Le milieu des diagonales est le **centre de symétrie** du parallélogramme.

Propriété 63 (parallélogramme - côtés)
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont, deux à deux, de même longueur.

Démonstration

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le point d'intersection de ses diagonales.



Montrons que $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur :

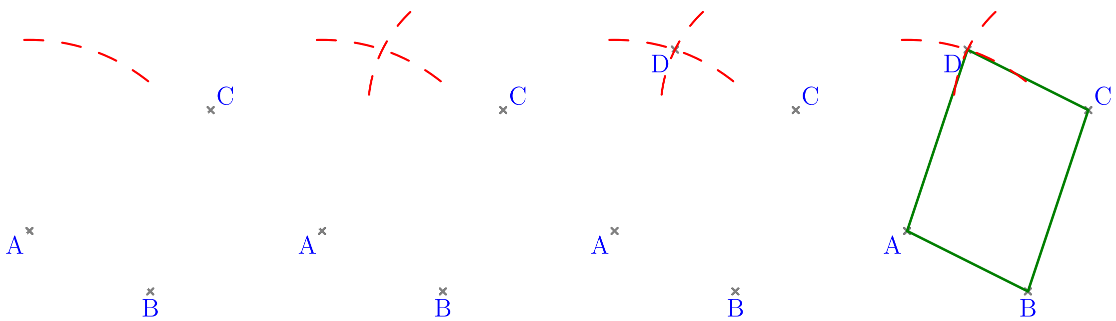
- I est le milieu de $[AC]$ donc C est le symétrique de A par rapport à I.
- I est le milieu de $[BD]$ donc D est le symétrique de B par rapport à I.
- Le segment $[CD]$ est donc l'image de $[AB]$ par la symétrie de centre I.
- Raisonnons à l'aide d'un chaînon déductif :
  - Je sais que : $[CD]$ est donc l'image de $[AB]$ par la symétrie de centre I ;
  - Propriété : la symétrie centrale conserve les longueurs.
  - Conclusion : les segments $[AB]$ et $[AC]$ ont la même longueur.

On démontre de la même façon que les côtés $[AD]$ et $[BC]$ ont la même longueur.
En conclusion, les côtés opposés d'un parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur. ∎

Méthode (Construire un parallélogramme avec un compas)

Soient A, B et C trois points non alignés.

- Étape 1 : tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.
- Étape 2 : tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.
- Étape 3 : tracer un point D à l'intersection des deux arcs de cercle.
- Étape 4 : tracer le parallélogramme $ABCD$.

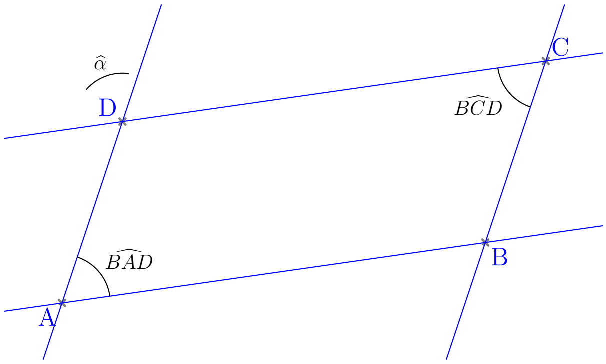


Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

Propriété 64 (parallélogramme - angles opposés)
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

Démonstration

Considérons la figure suivante :



- Première étape : montrons que $\widehat{BAD} = \widehat{\alpha}$.

  Raisonnons :
  - Je sais que :
    * Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
    * (AD) est une sécante commune à ces deux droites.
    * $\widehat{BAD}$ et $\widehat{\alpha}$ sont alternes-internes.
  - Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles alternes-internes de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.
  - Conclusion : $\widehat{BAD} = \widehat{\alpha}$.
- Seconde étape : montrons que $\widehat{\alpha} = \widehat{BCD}$.

  Raisonnons :
  - Je sais que :
    * Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
    * (CD) est une sécante commune à ces deux droites.
    * $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{BCD}$ sont alternes-internes.
  - Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles alternes-internes de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.
  - Conclusion : $\widehat{\alpha} = \widehat{BCD}$.
- Conclusion générale

  Nous avons montré que $\widehat{BAD} = \widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha} = \widehat{BCD}$.

Donc :

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$$

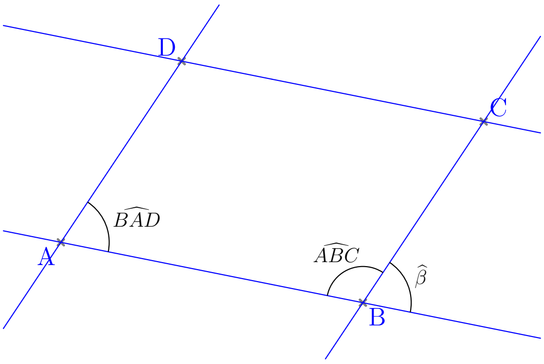
Nous pouvons démontrer de la même façon que $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$.

Les angles opposés d'un parallélogramme ont donc la même mesure. ■

Propriété 65 (parallélogramme - mesures des côtés opposés)
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même mesure.

Démonstration

Considérons la figure suivante :



- <u>Première étape</u> : montrons que $\widehat{BAD} = \widehat{\beta}$.

  Je sais que :
  - Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
  - (AB) est une sécante commune à ces deux droites.
  - $\widehat{BAD}$ et $\widehat{\alpha}$ sont correspondants.

  Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles correspondants de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.
  Conclusion : $\widehat{BAD} = \widehat{\beta}$.

- <u>Seconde étape</u> : montrons que $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 180°$.

  Les angles $\widehat{ABC}$ et β sont adjacents et forment un angle plat. On a donc :

  $$\widehat{ABC} + \widehat{\beta} = 180°.$$

  Comme $\widehat{BAD} = \widehat{\beta}$, nous pouvons en déduire que :

  $$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 180°.$$ ■

  Nous avons ainsi démontré que la somme de deux angles consécutifs d'un parallélogramme mesure 180°.

3 Reconnaître un parallélogramme

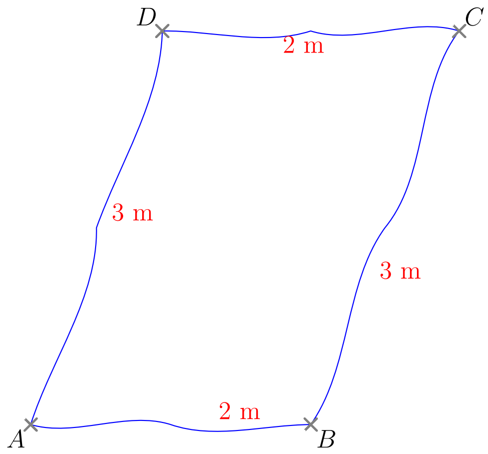
Propriété 66 (reconnaître un parallélogramme (1))
Si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont, deux à deux, de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Exercice 19.3

Les informations données dans la figure ci-contre, tracée à main levée, montrent que $AB = CD$ et $AD = BC$.

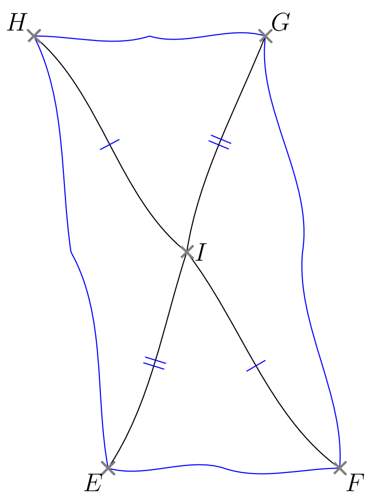
Nous pouvons alors déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$ à l'aide d'un chaînon déductif :

- Je sais que : $AB = CD$ et $AD = BC$.
- Propriété : si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont, deux à deux, de même longueur alors c'est un parallélogramme.
- Conclusion : le quadrilatère $ABCD$ est un ...



Propriété 67 (parallélogramme - diagonales)
Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Exercice 19.4



Les informations données dans la figure ci-contre, tracée à main levée, montrent que le point I est le milieu des deux diagonales $[EG]$ et $[FH]$.

Nous pouvons alors déterminer la nature du quadrilatère $EFGH$ à l'aide d'un chaînon déductif :

- Je sais que : les diagonales de $EFGH$ ont même milieu.
- Propriété : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
- Conclusion : le quadrilatère $EFGH$ est un ...

4 Parallélogrammes particuliers

Propriété 68 (parallélogramme - rectangle)
Si un parallélogramme a quatre angles droits alors c'est un rectangle.

Propriété 69 (parallélogramme - losange)
Si un parallélogramme a quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.

Propriété 70 (parallélogramme - carré)
Si un parallélogramme a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur alors c'est un carré.

5 Aire d'un parallélogramme

Définition 61 (hauteur d'un parallélogramme)
Soit un parallélogramme $ABCD$. On appelle **hauteur** relative au côté AB d'un parallélogramme un segment de droite :

- perpendiculaire à $[AB]$;
- dont une extrémité est sur la droite (AB) ;
- dont l'autre extrémité est sur la droite (CD).

Définition 62
Soit $[MN]$ une hauteur relative à un côté d'un parallélogramme.
Par abus de langage, la longueur MN est également appelée **hauteur**.

Propriété 71
L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la longueur d'un de ses côtés choisi comme base par la hauteur relative à ce côté.

$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Exercice 19.5

1. Complétez le programme Scratch ci-contre (blocs numéros 9 et 11) afin que le lutin dessine un parallélogramme.
2. Sur votre copie, tracez à msin levée le parallélogramme obtenu : codez la figure en indiquant les distances en pas.
3. Calculer le périmètre du parallélogramme.

```
1  quand ⚑ est cliqué
2  aller à x : (0) y : (0)
3  s'orienter à (0)
4  effacer tout
5  stylo en position d'écriture
6  avancer de (60) pas
7  tourner ↻ de (65) degrés
8  avancer de (40) pas
9  tourner ↻ de (...) degrés
10 avancer de (60) pas
11 tourner ↻ de (...) degrés
12 avancer de (40) pas
```

Réponse

1. Ci-contre.
2. Je trace le parallélogramme à main levée.
3. Je calcule le périmètre du parallélogramme :

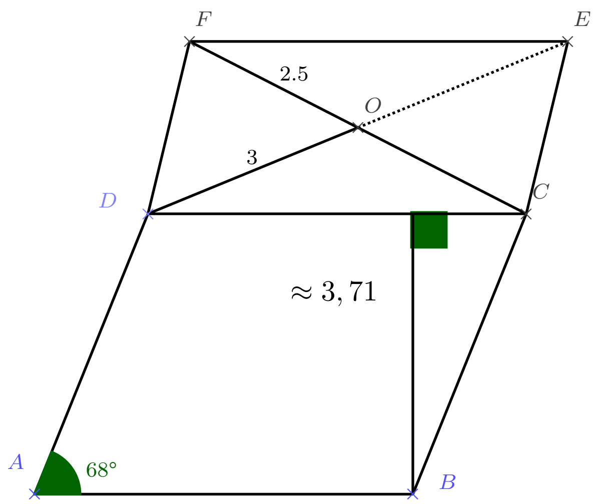
   ...

Exercice 19.6

1. Avec la règle et le compas, mais sans équerre, en codant les figures et en indiquant les longueurs et les angles donnés dans l'énoncé :
   a) Tracez un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 5\,\text{cm}$, $AD = 4\,\text{cm}$, et $\widehat{BAD} = 68°$.
   b) Tracez le parallélogramme $CDFE$ de centre O avec $OD = 3\,\text{cm}$ et $OC = 2{,}5\,\text{cm}$.
2. En justifiant à l'aide d'une propriété, déterminez :
   a) la longueur CD. b) l'angle $\widehat{BCD}$. c) la longueur OE.
3. Calculez l'angle $\widehat{CDA}$.
4. Mesurez approximativement la distance entre les droites AB et CD, puis calculez une valeur approchée de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Réponse

1. Traçons les parallélogrammes demandés :



2. a) Je calcule la longueur CD :
   - Je sais que : $ABCD$ est un parallélogramme et ...
   - Propriété : dans un parallélogramme, les côtés opposés ont ...
   - Conclusion : $CD = AB = AB = \ \ldots$

   La longueur CD mesure ...

   b) Je calcule l'angle $\widehat{BCD}$:
   - Je sais que : $ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{BCD} = \ \ldots$
   - Propriété : dans un parallélogramme, les angles opposés ont ...
   - Conclusion : $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \ \ldots$.

   L'angle $\widehat{BCD}$ mesure ...

   c) Je calcule la longueur OE :
   - Je sais que : $CDFE$ est un parallélogramme O est le centre du parallélogramme, DE est une diagonale et $OD = \ \ldots$
   - Propriété : dans un parallélogramme, les diagonales ...
   - Conclusion : $OC = OD = AB = \ \ldots$

   La longueur OE mesure ...

3. Raisonnons :
   - Les angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{BCD} = 68°$ sont supplémentaires.
   - Propriété : la somme de deux anges supplémentaires est égale à 180°
   - Conclusion :$\widehat{CDA} = 180° - \widehat{BCD} = \ \ldots$

   L'angle $\widehat{CDA}$ mesure ...

4. La distance entre les droites (AB) et (CD) mesure approximativement 3,71 cm (voir figure ci-dessus).

   Soit $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$:

   $\mathcal{A} = \text{base} \times \textit{hauteur}$

   $\mathcal{A} \approx 5 \times 3,71 \approx \ \ldots$

   L'aire du parallélogramme $ABCD$ mesure environ $\ \ldots$