CHAPITRE 4

SYMÉTRIE CENTRALE ET AXIALE

1 Rappels sur la symétrie axiale

Définition 11 (médiatrice)

La **médiatrice** d'un segment de droite est la droite qui passe par le milieu du segment et qui lui est perpendiculaire.

Définition 12 (symétrique d'un point par rapport à une droite)

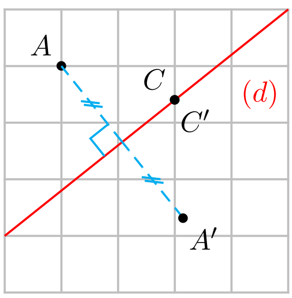
Le **symétrique d'un point A par rapport à une droite** (d) est le point A' tel que la droite (d) soit la médiatrice du segment $[AA']$.

Propriété 14 (symétrique d'un point par rapport à une droite)

Si $A \in (d)$ le symétrique du point A par la droite (d) est le point A lui-même.

Si $A \notin (d)$, le symétrique du point A par la droite (d) n'appartient pas à la droite (d).

Exercice 4.1

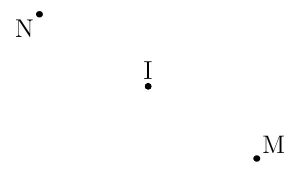


Ci-contre :

- la droite (d) est la médiatrice du segment ...
- Le point ... est le symétrique du point A par rapport à la droite ...
- Le point ... est le symétrique du point C par rapport à la droite ...
- Les points C et C' sont ...

Exercice 4.2

- Ci-contre, tracez le segment $[MN]$.
- Le point I est le milieu du segment $[MN]$.
- Tracez la droite (d) telle que que $I \in (d)$ et $(d) \perp (MN)$.
- Codez la figure.
- Expliquez ce qu'est la droite (d) relativement au segment $[MN]$.



Réponse

La droite ... est perpendiculaire à la droite ... et elle passe par le milieu du segment ...

Donc, la droite (d) est la ...

Propriété 15 (médiatrice)
Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance de chacune des deux extrémités de ce segment.

Propriété 16 (médiatrice)
Si un point est à égale distance de chacune des deux extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

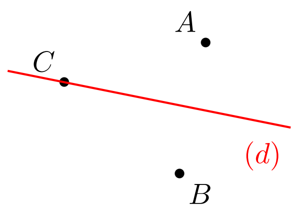
Exercice 4.3

Ci-dessous, (d) est la médiatrice du segment $[AB]$ et $C \in (d)$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Réponse

Raisonnons :

- Je sais que : (d) est la médiatrice du segment $[AB]$ et $C \in [AB]$.
- Propriété : si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est à égale distance de ses deux extrémités.
- Conclusion : $CA =$ ....



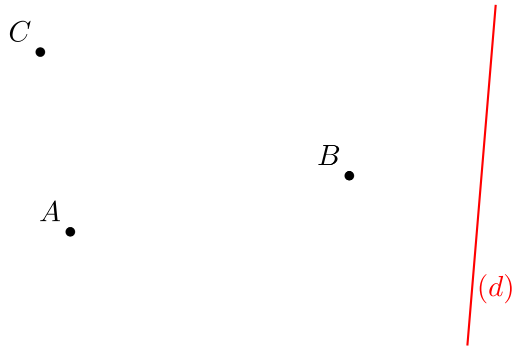
Le triangle ABC possède deux longueurs égales.
C'est donc un triangle ...

Propriété 17 (conservation des longueurs, angles et aires par la symétrie axiale)
La symétrie axiale conserve les longueurs, les angles et les aires.

Exercice 4.4

On donne :

$AB = 7{,}2\,\text{km}$.
$BC = 6\,\text{km}$.
$AC = 3{,}2\,\text{km}$.
$\widehat{ABC} = 28°$.
$\widehat{BAC} = 90°$.



a. Tracez ABC. Tracez le symétrique $A'B'C'$ du triangle ABC par rapport à la droite (d).

b. En justifiant, déterminez la longueur $A'C'$.

c. En justifiant, déterminez l'angle $\widehat{A'B'C'}$.

d. En justifiant, déterminez l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle $A'B'C'$.

Réponse

a. Voir ci-dessus.

b. Raisonnons :
   - Je sais que : $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à (d) et ...
   - Propriété : la symétrie axiale conserve ...
   - Conclusion : $A'C' =$ ...

c. Raisonnons :
   - Je sais que : $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à (d) et ...
   - Propriété : la symétrie axiale conserve ...
   - Conclusion : $\widehat{A'B'C'} =$ ...

   Je calcule d'abord l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC rectangle en A :
   $$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{... \times ...}{2} = \frac{... \times ...}{2} = \ldots\ \text{km}^2$$
   J'obtiens ensuite la valeur de $\mathcal{A}'$ par un raisonnement :

d.
   - Je sais que : $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à (d) et ...
   - Propriété : la symétrie axiale conserve ...
   - Conclusion : $\mathcal{A}' =$ ...

2 Symétrie centrale

2.1 Définition

Définition 13 (symétrie centrale)
Soient O et M deux points du plan distincts.
Le symétrique du point M par la **symétrie centrale** de centre O est le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.

Le symétrique du point O est le point O lui-même.

Exercice 4.5

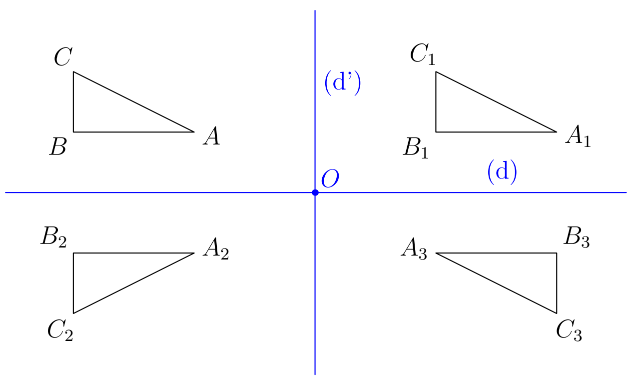
Á l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, tracez le symétrique M' du point M par la symétrie centrale de centre O et codez la figure.

2.2 Symétrique d'une figure

Définition 14 (figures symétriques par rapport à un point)
Deux figures sont dites **symétriques** par une symétrie de centre O si on peut superposer l'une des figures à l'autre en lui faisant faire un demi-tour autour du point O.

Exercice 4.6
Ci-dessous, identifiez :

1. Le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d).
2. Le symétrique du triangle ABC par rapport au point O.



Réponse

1. Le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d) est ...
2. Le symétrique du triangle ABC par rapport au point O est ...

3 Propriété de la symétrie centrale

Propriété 18

Par une symétrie centrale de centre O, le symétrique d'une droite est une droite.

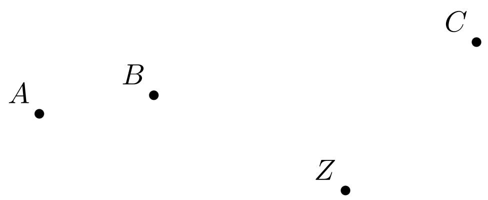
On dit que la symétrie centrale conserve l'alignement des points.

Exercice 4.7

A, B et C sont trois points alignés.

Tracer, ci-contre, les symétriques A', B' et C' des points A, B et C par rapport au point Z.

Que peut-on dire des points A',B' et C' ?
Justifiez.



Réponse

Les points A', B' et C' semblent alignés. Prouvons cette conjecture à l'aide d'un raisonnement :

- Je sais que : Les points A, B et C sont ...
- Propriété : par une symétrie centrale, les symétriques de points alignés sont également ...
- Conclusion : les symétriques A', B' et C' des points A, B et C sont ...

Propriété 19

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.

On dit que la symétrie centrale conserve le parallélisme.

Propriété 20

L'image d'un segment de droite par la symétrie de centre O est un segment de droite de même longueur.

On dit que la symétrie centrale conserve les longueurs.

Propriété 21

Deux figures symétriques par une symétrie centrale ont la même aire.

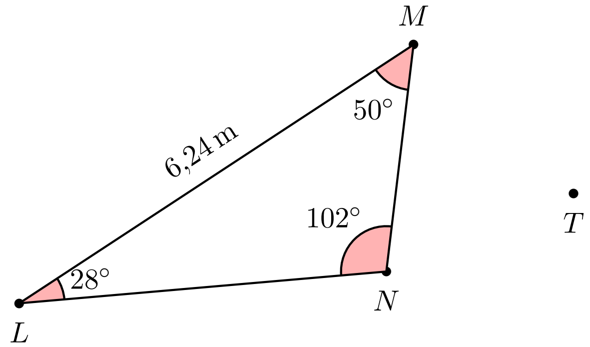
On dit que la symétrie centrale conserve les aires.

Propriété 22

Deux figures symétriques par une symétrie centrale ont les mêmes angles.

On dit que la symétrie centrale conserve les angles.

Exercice 4.8



1. Ci-dessus, tracez le symétrique du triangle LMN par rapport au point T.
2. Déterminez la longueur $L'M'$.
3. Déterminez l'angle $\widehat{L'N'M'}$.

Réponse

1. Voir figure.
2. Raisonnons :
   - Je sais que : ...
   - Propriété : La symétrie centrale conserve ...
   - Conclusion : $L'M' = \ \ldots$
3. Raisonnons :
   - Je sais que : ...
   - Propriété : La symétrie centrale conserve ...
   - Conclusion : $\widehat{L'N'M'} = \ \ldots$

3.1 Symétrique d'un cercle

Propriété 23
Par une symétrie centrale, le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.

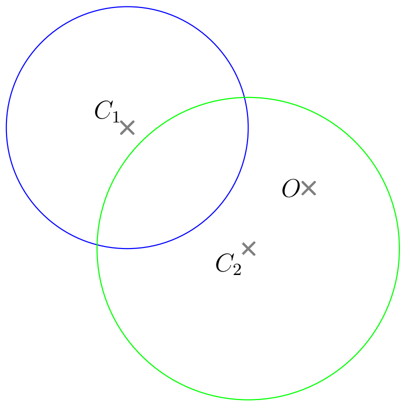
Méthode
Pour tracer le symétrique d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon r par rapport à un point O :

- On trace le symétrique C' du point C par rapport à O.
- Le cercle de centre C' et de rayon r est alors le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O.

Exercice 4.9

Ci-contre, tracez :

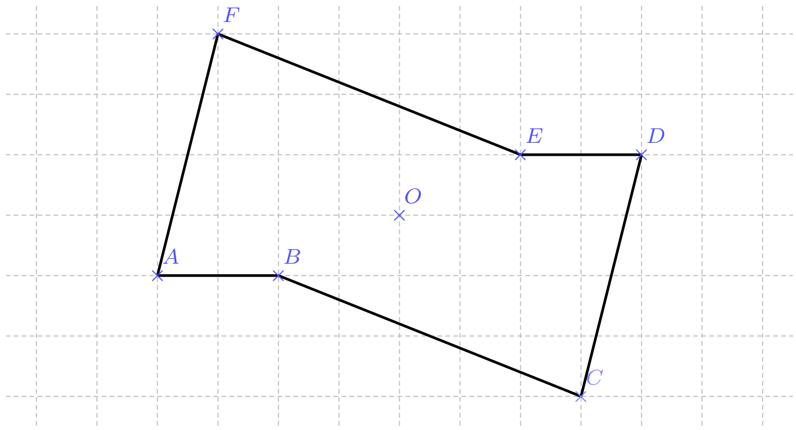
- le symétrique du cercle de centre C_1 par la symétrie de centre O.
- le symétrique du cercle de centre C_2 par la symétrie de centre O.



4 Centre de symétrie d'une figure

Définition 15
Si le symétrique d'une figure par rapport à un point O est cette figure elle-même,
alors le point O est le **centre de symétrie** de cette figure.

Exercice 4.10
Tracez le symétrique $A'B'C'D'E'F'$ de la figure $ABCDEF$ par la symétrie de centre G.
La figure $ABCDEF$ possède-t-elle un centre de symétrie ? Si oui, en quel point ?



Réponse

...

...

5 Notion de transformation géométrique

Définition 16 (transformation géométrique)

Dans le cadre du cours de cinquième, nous considérons qu'une **transformation géométrique** modifie la position, la forme ou la taille d'une figure pour obtenir une figure appelée **image**.

En cinquième, nous devons connaître deux transformations :

- La symétrie axiale.
- La symétrie centrale.

Par ces deux transformations, la figure image obtenue à la même forme et la même taile que la figure initiale, mais généralement pas la même position.