CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

1 Points et droites

Définition 11 (point, points distincts, points confondus)

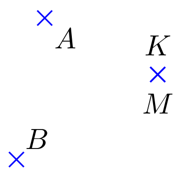
Dans un plan, il y a une infinité de points.
On les nomme à l'aide d'une lettre majuscule.
On représente un **point** par une croix.
Deux points **distincts** sont notés avec des lettres différentes.
Si deux points ne sont pas distincts alors il sont **confondus**.

Exercice 2.1

Ci-contre, on a placé les points A, B, K et M.

Les points A et B sont ...

Les points K et M sont ...



Définition 12 (droite)

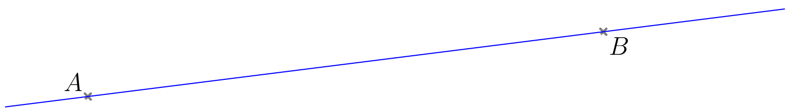
Une **droite** est formée par une infinité de points alignés.

Remarque

Une droite est une ligne (droite !) illimitée des deux côtés.
Il est donc impossible de la représenter entièrement.

Méthode

Pour tracer une droite passant par les points A et B, on relie les points A et B à la règle en prolongeant le trait au-delà des points.

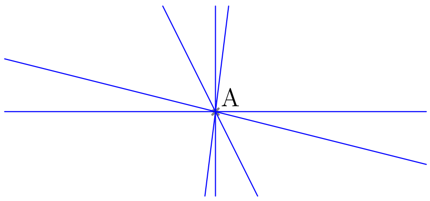


Propriété 5 (droites passant par un point)

Par un point, il passe une infinité de droites.

Exercice 2.2

Ci-dessous, on représente ... droites parmi toutes celles qui passent par le point A.



Définition 13 (axiome)

Une affirmation est un **axiome** lorsqu'on considère qu'elle est évidente, on ne va pas la démontrer.

Axiome 1

Par deux points distincts A et B, il ne passe qu'une seule droite.

Définition 14 (droite (AB))

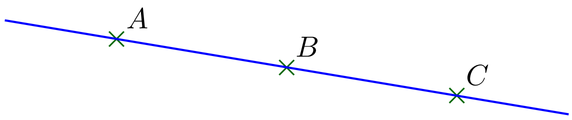
Une droite passant par deux points A et B peut être notée (AB) ou (BA).

Définition 15 (points alignés)

Si trois points (ou plus) appartiennent à une même droite alors ils sont **alignés**.

Exercice 2.3

La droite ci-dessous passe par les points ...



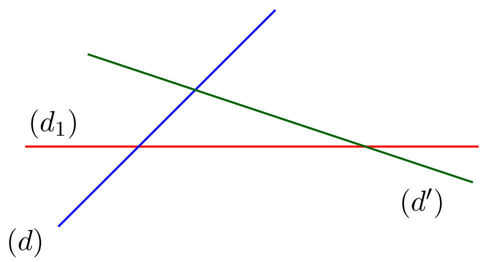
Nommer cette droite de six façons différentes : (...), (...), (...), (...), (...) ou (...).

Remarque

On peut donner un nom à une droite même si on n'en connaît aucun point.

Exemple

On ne connaît aucun point appartenant aux trois droites ci-dessous, mais on peut nommer ces droites à l'aide d'une lettre minuscule, éventuellement suivie d'un chiffre ou d'un signe, par exemple : (d), (d_1) et (d').
(d') se lit « d prime ».

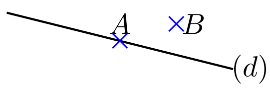


Définition 16 (notation $\in$)

Soit A un point qui appartient à une droite (d).
Soit B un point qui n'appartient pas à la droite (d).

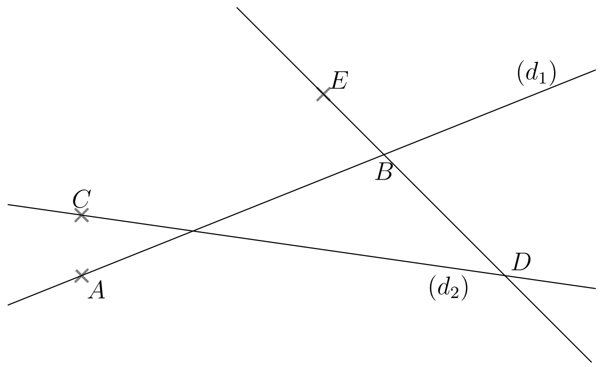
On note :

$A \in (d)$.
$B \notin (d)$.



$\in$ signifie « **appartient à** » .
$\notin$ signifie « **n'appartient pas à** ».

Exercice 2.4
Observez la figure ci-dessous puis complétez avec le symbole « $\in$ » ou avec le symbole « $\notin$ » :



1. $A \quad \ldots \quad (d_1)$;
2. $B \quad \ldots \quad (d_2)$;
3. $C \quad \ldots \quad (BD)$;
4. $D \quad \ldots \quad (BE)$;
5. $E \quad \ldots \quad (d_1)$;
6. $B \quad \ldots \quad (AB)$

Définition 17 (droites distinctes ou confondues)
Deux droites sont **distinctes** lorsqu'il existe un point qui appartient à une droite mais pas à l'autre.

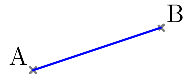
Deux droites qui ne sont pas distinctes sont dites **confondues**.

Exercice 2.5
Observer la figure de l'exemple précédent puis compléter les phrases suivantes avec les mots « distincte » ou « confondue ».

1. Les droites (d_1) et (d_2) sont $\ldots$
2. Les droites (BD) et (BE) sont $\ldots$
3. Les droites (d_1) et (AE) sont $\ldots$
4. Les droites (d_2) et (CD) sont $\ldots$

2 Segments et codage

Définition 18 (segment)
Le **segment** d'**extrémités** A et B est la portion de droite déterminée par deux points A et B. Ce segment est noté $[AB]$ ou $[BA]$.



Remarque

Un segment est limité des deux côtés.

Définition 19 (longueur d'un segment)

La **longueur** du segment $[AB]$ est la distance du point A au point B.
Elle est notée AB.

Remarques

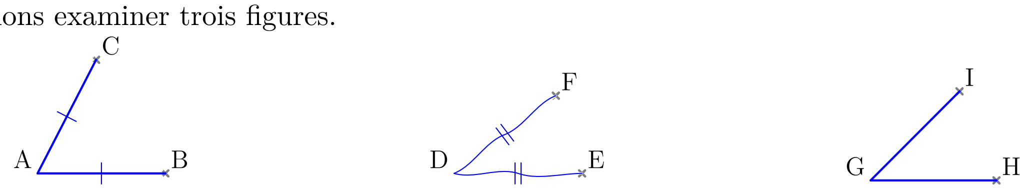
- La longueur du segment $[AB]$ est la longueur du plus court chemin entre les points A et B.
- Si deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur, alors $AB = CD$.

Définition 20 (codage)

Dans une figure, on **code** les longueurs égales à l'aide d'un même symbole.

Exercice 2.6

Nous allons examiner trois figures.



1. À gauche, le codage nous garantit que les segments ... et ... ont ...

$$AB \dots AC$$

2. Au centre, la figure est tracée « à main levée », mais là aussi, le codage nous garantit que les segments ... et ... ont ...

$$DE \dots DF$$

3. À droite, en l'absence de codage sur la figure, il est impossible de garantir que les segments ... et ... ont la même longueur.

3 Demi-droite

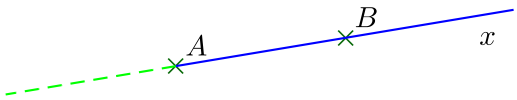
Définition 21 (demi-droite)

Une **demi-droite** est une partie d'une droite limitée d'un côté par un point de cette droite.
Ce point est appelé l'**origine** de la demi-droite.

Notation

Ci-dessous, la demi-droite représentée en traits pleins peut être notée :

- $[AB)$, la demi-droite d'origine A passant par B ;
- $[Ax)$, la demi-droite d'origine B de direction x.
  Une direction est indiquée par une lettre minuscule.

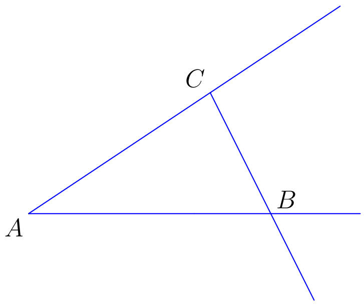


Remarque

Une demi-droite est limitée d'un côté et illimitée de l'autre.

Exercice 2.7

Identifier et nommer chaque demi-droite tracée dans la figure suivante.



1. La demi-droite ... .
2. La demi-droite ... .
3. La demi-droite ... .

4 Position de deux droites dans le plan

4.1 Droites perpendiculaires

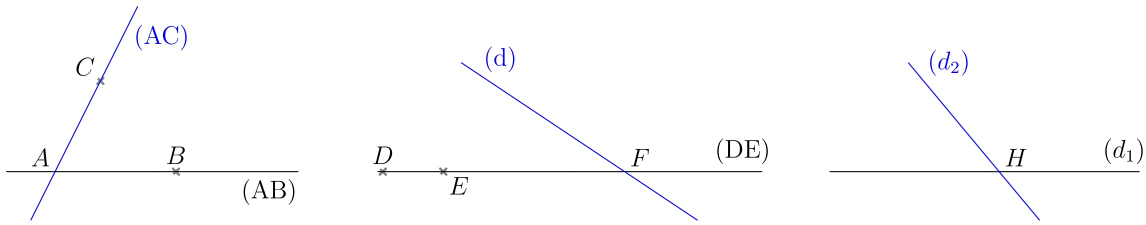
Définition 22 (droites sécantes, point d'intersection)

Deux droites distinctes qui ont un point commun sont **sécantes**.
Ce point est le **point d'intersection** des deux droites.

Propriété 6 (droites sécantes)
Deux droites sécantes possèdent un unique point commun.

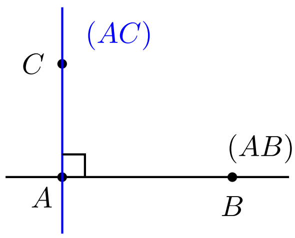
Exercice 2.8

1. À gauche : ... est le point d'intersection des droites ... et ...
2. Au centre : ... est le point d'intersection des droites ... et ...
3. À droite : ... est le point d'intersection des droites ... et ...



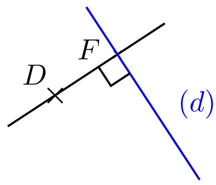
Définition 23 (droites perpendiculaires)
Deux droites sécantes qui forment quatre angles droits sont **perpendiculaires**.
Sur une figure, on code deux droites perpendiculaires en plaçant un carré à leur intersection.

Exercice 2.9



$(AB) \perp$ ...

La droite ... est perpendiculaire à la droite ...



(DF) ... (...)

Les droites ... et ... sont perpendiculaires.

Méthode (construire une droite perpendiculaire à une autre passant par un point)

Ci-dessous, pour construire la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (d), on peut :

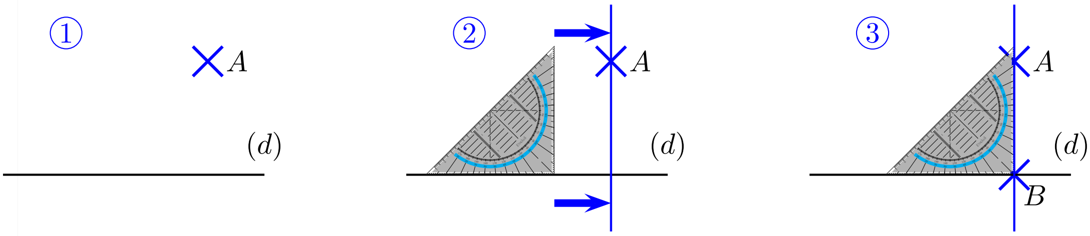
(1) – Placer le point A et tracer la droite (d).

(2) – Positionner un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la droite (d).

– Faire glisser l'équerre de façon à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par A.

(3) – Placer un point B (par exemple) à l'intersection de la droite (d) et du côté perpendiculaire de l'angle droit.

– Tracer la droite (AB).



Par construction, les droites (d) et (AB) sont perpendiculaires.

4.2 Droites parallèles

Définition 24 (droites parallèles)

Deux droites qui n'ont aucun point commun sont **parallèles**.

La notation $(AB)//(d)$ signifie que la droite (AB) est parallèle à la droite (d).

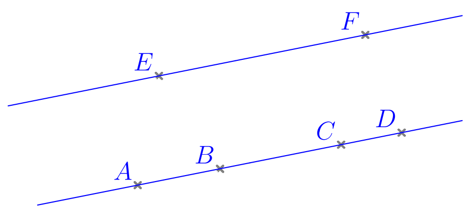
Propriété 7 (droites parallèles distinctes ou confondues)

Deux droites parallèles sont soit distinctes, soit confondues.

Exercice 2.10

Les droites (...) et (...) sont parallèles et confondues.

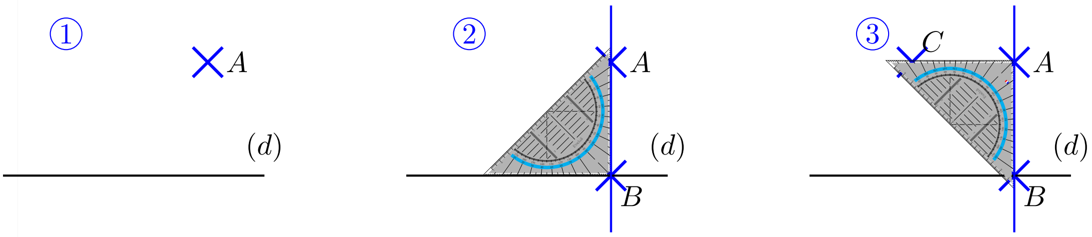
Les droites (...) et (...) sont parallèles et distinctes.



Méthode (construire une droite parallèle à une autre passant par un point)

Pour construire la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (d), on peut :

1. Placer le point A et tracer la droite (d).
2. Tracer la droite (AB) en suivant la méthode "*construire une droite perpendiculaire à une autre passant par un point*".
3. Tracer la droite (AC) de la même façon.



Par construction, les droites (d) et (AC) sont perpendiculaires.

5 Propriétés des droites

5.1 Si deux droites sont parallèles à une même droite...

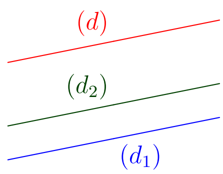
Propriété 8 (si deux droites sont parallèles à une même droite ...)

Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exercice 2.11

Les droites (d_1), (d_2) et (d) sont telles que :

- $(d_1)//(d)$.
- $(d_2)//(d)$.



Démontrez que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Réponse

Nous allons réaliser un chaînon déductif.

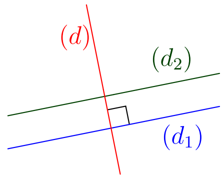
Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$\ldots // \ldots.$ $\ldots // \ldots.$	$\ldots$	$\ldots // \ldots$

Nous avons ainsi démontré que les droites ... et ... sont ...

5.2 Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite ...

Propriété 9 (si deux droites sont perpendiculaires à une même droite ...)
Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exercice 2.12
Cette fois, les droites (d_1), (d_2) et (d) sont telles que :



- $(d_1) \perp (d)$.
- $(d_2) \perp (d)$.

Démontrez que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Réponse

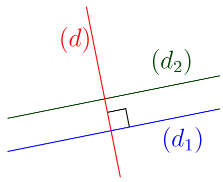
Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$\ldots \perp \ldots.$ $\ldots \perp \ldots.$	...	$\ldots // \ldots$

Nous savons maintenant que les droites ... et ... sont ...

5.3 Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une ...

Propriété 10 (si deux droites sont parallèles ...)
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice 2.13
Dans ce troisième exemple, nous savons que :



- $(d_1)//(d_2)$.
- $(d) \perp (d_1)$.

Démontrer que les droites (d_1) et (d) sont perpendiculaires.

Réponse

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
$\ldots // \ldots.$ $\ldots \perp \ldots.$	...	$\ldots \perp \ldots$

Cette fois, nous avons démontré que les droites ... et ... sont perpendiculaires.

6 Notion de grandeur et distance

Définition 25 (grandeur)
Une **grandeur** est une caractéristique ou une propriété qui peut être mesurée ou calculée.
Elle s'exprime souvent accompagnée d'une unité de mesure.
On peut connaître d'une grandeur sa **valeur exacte** ou sa **valeur approchée**.

Notation

- On utilise le signe $=$ pour une valeur exacte.
- On utilise le signe $\approx$ pour une valeur approchée.

Exercice 2.14

1. Prenons un carré dont le côté c mesure 4 cm.

   Je connais donc la valeur exacte du côté, que j'appelle c, et je peux écrire c ... 4 cm.

2. Un site internet indique, qu'en prenant un itinéraire "rapide", notre collège et la Grande Plage de Quiberon sont distants de 893 km.

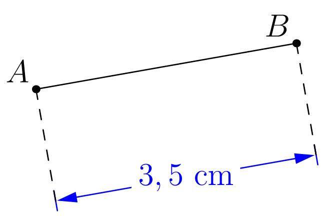
   C'est une distance d approximative. La distance réelle est peut-être de 893,231 km ou de 892,998 km.

   J'écris donc : d ... 893 km.

Définition 26 (distance entre deux points)
La **distance entre deux points** A et B est la longueur du segment $[AB]$.
Une distance est une grandeur.

Exercice 2.15

Ci-dessous, le segment $[AB]$ mesure 3,5 cm.
On note : AB=3,5 cm.



Définition 27 (distance d'un point à une droite)
La **distance** entre un point A et une droite (d) est la distance entre le point A et le point de la droite qui est le plus proche de A.

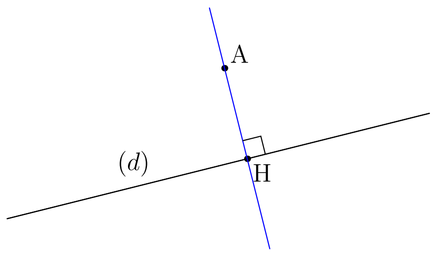
Propriété 11 (distance d'un point à une droite)
La distance d'un point A à une droite (d) est la longueur du segment dont les extrémités sont :

- le point A ;
- le point d'intersection H entre la droite (d) et sa perpendiculaire passant par A.

Exercice 2.16

Avec les notations de la propriété ci-dessus :

AH est la distance du point A à …



Remarque

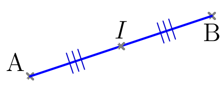
Si le point A appartient à la droite (d), alors la distance de A à (d) est nulle.

7 Milieu d'un segment

Définition 28 (milieu d'un segment)
Le **milieu d'un segment** $[AB]$ est le point qui appartient à ce segment et qui est à égale distance de A et de B.

Exemple

Ci-dessous, le codage de la figure indique que I est le milieu du segment $[AB]$.



Propriété 12 (milieu d'un segment)
Si I est le milieu du segment AB alors :

$$AI = IB.$$

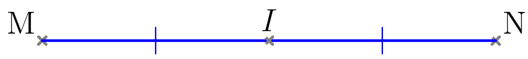
$$AB = 2 \times IB.$$

Exercice 2.17
Un segment d'extrémités M et N a pour longueur 10 cm.
On appelle I le milieu de ce segment.

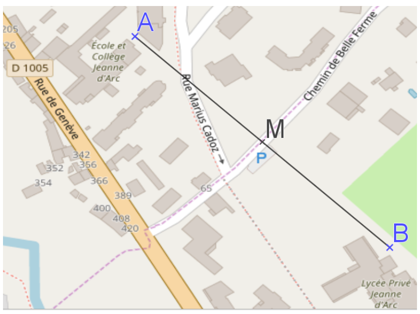
1. Nommez ce segment.
2. Indiquez sans justifications les longueurs MI et IN.
3. Réalisez et codez une figure.

Réponse

1. Je nomme ce segment ...
2. $MI =$ ... et $IN =$ ...
3. Je réalise la figure ci-contre.



Exercice 2.18



On observe le déplacement d'un oiseau :

- Il se déplace en ligne droite.
- Il part du point A, dans la cour du collège.
- Il arrive au point B, près de l'accueil du lycée.
- Le milieu de son trajet se situe au point M, sur le chemin de Belle Ferme.
- La distance du point A au point M est de 146 m.

1. Démontrez que $AB = 2 \times AM$.
2. Déduisez-en la distance totale parcourue par l'oiseau.

Réponse

1. Avec un chaînon déductif :

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
... est le milieu de ...	Si ... alors ...	$AB = 2 \times$ ...

2. $AB = 2 \times \ \dots \ = 2 \times \ \dots \ = \ \dots$
   L'oiseau parcourt au total $\dots$

8 Programmes de construction

Définition 29 (programme de construction)

Un **programme de construction** est un texte qui liste des instructions permettant de tracer une figure géométrique.

Définition 30 (conjecture)

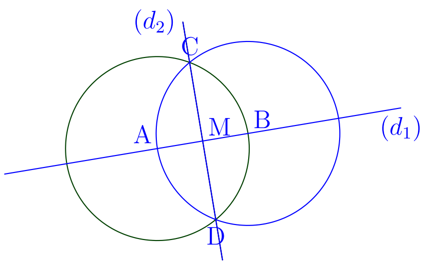
Une **conjecture** est une proposition que l'on considère comme vraie mais que l'on n'a pas encore démontrée.
Après démonstration, une conjecture peut s'avérer vraie ou fausse.

Méthode (écrire un programme de construction)

Pour écrire un programme de construction, on s'efforce :

- de donner une seule consigne par phrase ;
- d'utiliser uniquement les verbes placer (un point) et tracer (une droite, un cercle...) ;
- de rédiger de façon claire et précise.

Exercice 2.19



1. Écrivez un programme de construction de la figure ci-contre.
2. Proposez une conjecture concernant les droites (d_1) et (d_2).
3. Proposez une conjecture concernant le point M et le segment $[AB]$.

Réponse

1. Voici un programme de construction possible :
   a. Placer deux points distincts A et $\dots$
   b. Tracer la droite (d_1) passant par A et $\dots$
   c. Tracer le cercle de centre A passant par $\dots$
   d. Tracer le cercle de centre B passant par $\dots$
   e. Placer les points C et D aux intersections de ces deux cercles, avec C au-dessus de D.

f. Tracer la droite (d_2) passant par C et par D.

2. Les droites (d_1) et (d_2) semblent …
3. Le point M semble être …

Méthode (exécuter un programme de construction)

Pour exécuter un programme de construction il est conseillé de :

- suivre les instructions dans l'ordre où elles sont rédigées ;
- recenser le matériel nécessaire (règle, équerre, compas...) ;
- construire la figure.

Exercice 2.20

Voici un programme de construction :

a. Placer un point A.

b. Tracer la droite verticale (d_1) passant par A.

c. Placer le point M, en-dessous de A, tel que $M \in (d_1)$ et $AM = 2\,\text{cm}$.

d. Tracer en bleu le cercle de centre M passant par A.

e. Placer un point B tel que M soit le milieu de $[AB]$.

f. Tracer en rouge le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre A passant par M.

g. Tracer la droite (d_2) passant par A, avec $(d_1) \perp (d_2)$.

h. Placer le point K à droite de A tel que $K \in (d_2)$ et $K \in \mathcal{C}_2$.

i. Tracer le segment $[KM]$.

j. Placer le point L à l'intersection de $[KM]$ et $\mathcal{C}_1$.

Tracez une figure correspondant à ce programme de construction.

Réponse