CHAPITRE 6

PROPORTIONNALITÉ

1 Notion de proportionnalité (rappels)

Définition 30 (proportionnalité)

Si l'on multiplie toujours par le même nombre non nul les valeurs d'une grandeur pour obtenir les valeurs d'une autre grandeur, alors ces grandeurs sont dites **proportionnelles**.

Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

On parle d'une **situation de proportionnalité**.

2 Calculer et utiliser un coefficient de proportionnalité (rappels)

Exercice 6.1

On considère que le prix d'un fruit est proportionnel à sa masse en kg et l'on souhaite compléter le tableau suivant :

Masse (kg)	2	3	?
Prix (€)	7	?	24,5

$\times ?$

Réponse

Calculons le coefficient de proportionnalité c.
$c = \ \ldots$

Nous pouvons maintenant calculer le prix de 3 kg de fruits.
$3 \times c = \ \ldots$

Calculons maintenant la quantité de fruits que l'on peut acheter avec 24,5 €.
$\dfrac{24,5}{c} = \ \ldots$

Complétons le tableau (page suivante).

Masse (kg)	2	3	...
Prix (€)	7	...	24,5

3 Quatrième proportionnelle et produit en croix

Définition 31 (quatrième proportionnelle)
Dans un tableau de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est un quatrième nombre calculé à partir de trois nombres du tableau que l'on connaît.

Exemple
Dans le tableau de proportionnalité suivant :

Le nombre x est la quatrième proportionnelle calculée à partir des nombres 4, 6 et 10.

4	6
10	x

Propriété 28 (égalité des produits en croix)
Dans un tableau de proportionnalité tel que celui-ci :

a	c
b	d

Les produits en croix sont égaux :

$$a \times d = b \times c.$$

Exercice 6.2
Complétez le tableau de proportionnalité ci-dessous :

12	20
9	...

Réponse

Appelons x le nombre cherché.
Le tableau est proportionnel donc les produits en croix sont égaux et :

$$12 \times x = 9 \times 20.$$

C'est une équation d'inconnue x que nous allons résoudre :

$$\frac{12 \times x}{12} = \frac{9 \times 20}{12}$$

$$x = \frac{3 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4}$$

$$x = \frac{3 \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{4}}$$

$$x = \ldots$$

La solution de l'équation est $\ldots$, et nous pouvons maintenant compléter le tableau.

12	20
9	…

é

En pratique, nous pourrons rédiger de façon plus concise à l'aide du produit en croix :

$$x = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots} = \ldots$$

Exercice 6.3

Calculez les nombres manquants dans chacun des tableaux de proportionnalité suivants :

1.

10	4
25	x

2.

6	y
18	15

3.

z	3
35	21

4.

3	4
t	36

Réponse

1. $10 \times x = 25 \times 4$

   $x = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$

   $x = \ldots$

   Le nombre manquant est $\ldots$

2. $18 \times y = 6 \times 15$

   $y = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$

   $y = \ldots$

   Le nombre manquant est $\ldots$

3. $z \times 21 = 35 \times 3$

   $z = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$

   $z = \ldots$

   Le nombre manquant est $\ldots$

4. $t \times 4 = 3 \times 36$

   $t = \frac{\ldots \times \ldots}{\ldots}$

   $t = \ldots$

   Le nombre manquant est $\ldots$

4 Déterminer si un tableau représente une situation de proportionnalité (rappels)

Propriété 29 (déterminer si un tableau est proportionnel)

Pour déterminer si un tableau mettant en correspondance des données numériques associées à deux grandeurs traduit une situation de proportionnalité, on calcule le coefficient pour chaque paire de données.

Si les coefficients sont tous identiques, le tableau peut correspondre à une situation de proportionnalité.

Si les coefficients ne sont pas tous identiques, le tableau n'est pas proportionnel.

Exercice 6.4

Considérons ces deux tableaux :

1.

1,3	3,7	8,9
3,64	10,36	24,92

2.

1,6	4,3	6,5
5,072	13,803	20,605

Peuvent-ils chacun être associés à une situation de proportionnalité ?

Réponse

1. Pour le premier tableau, calculons chaque coefficient.

   $\dfrac{3,64}{1,3} = \ \dots$ $\qquad \dfrac{10,36}{3,7} = \ \dots$ $\qquad \dfrac{24,92}{8,9} = \ \dots$

   Les coefficients sont tous égaux, donc le tableau peut correspondre à une situation de proportionnalité. On dit que le tableau est ...

   On connait également le coefficient de proportionnalité : ...

2. Calculons les deux premiers coefficients pour le second tableau.

   $\dfrac{5,072}{1,6} = \ \dots$ $\qquad \dfrac{13,803}{4,3} = \ \dots$

   Les coefficients ne sont pas tous égaux, puisque les deux premiers coefficients calculés sont différents (il est alors inutile de calculer le troisième).

   Le second tableau ne peut donc pas correspondre à une situation de proportionnalité. Ce tableau ...

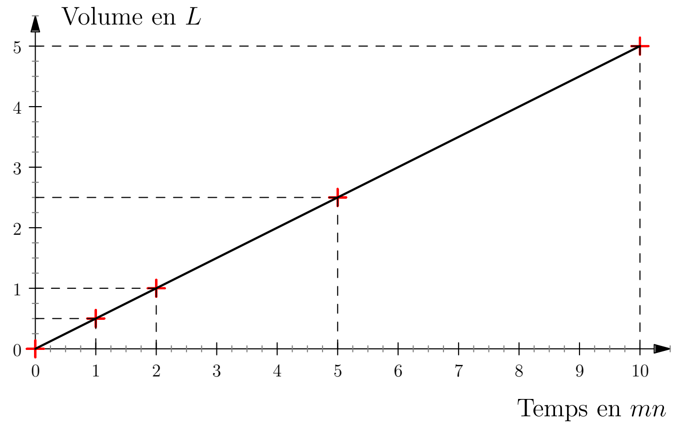
5 Représentation graphique d'une situation de proportionnalité

On remplit un récipient gradué à l'aide d'un robinet dont le débit est constant et, à chaque minute, on note le volume d'eau présent dans le récipient.

Durée (en mn)	0	1	2	5	10
Volume (en L)	0	0,5	1	2,5	5

Pour représenter cette situation par un graphique, il faut :

- associer la première grandeur sur l'axe horizontal (l'axe des abscisses) en précisant l'unité : le temps (en mn) ;
- associer la seconde grandeur sur l'axe vertical (l'axe des ordonnées) en précisant l'unité : le volume (en L) ;
- placer (par exemple) un point indiquant qu'au bout de 2 mn, le récipient contient 1 litre d'eau ;
- placer les autres points de la même façon ;
- relier les points entre eux.



Propriété 30 (représentation graphique, situation proportionnelle)

Lorsqu'on représente des données proportionnelles par des points sur un graphique, ces points sont alignés avec l'origine du repère.

Réciproquement, si ces points sont alignés avec l'origine du repère, les données sont proportionnelles.

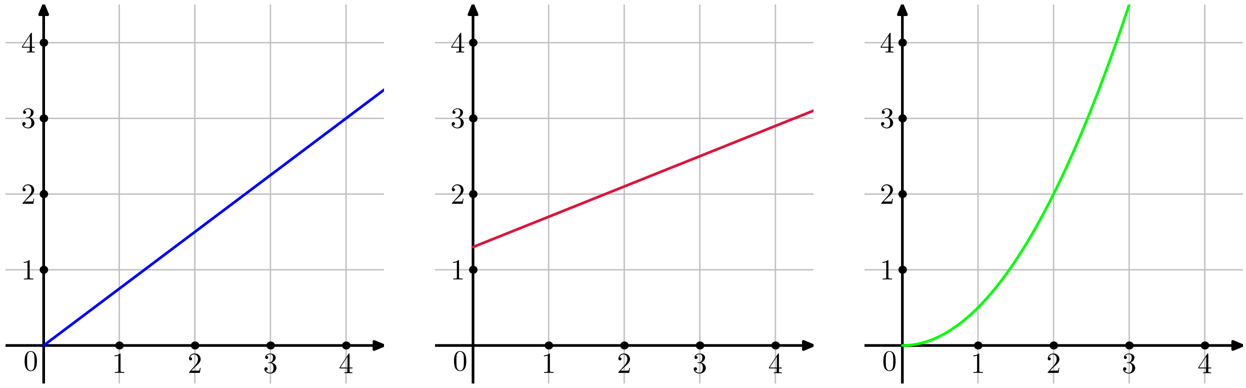
Propriété 31 (représentation graphique, situation non proportionnelle)

Lorsqu'on représente des données qui ne sont pas proportionnelles par des points sur un graphique, ces points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

Réciproquement, si ces points ne sont pas alignés avec l'origine du repère, les données ne sont pas proportionnelles.

Exercice 6.5

Pour chaque représentation graphique, déterminez si elle correspond à une situation de proportionnalité. Justifiez.



Réponse

- À gauche : ....
  ....
- Au centre : ....
  ....
- À droite : ....
  ....

Exercice 6.6

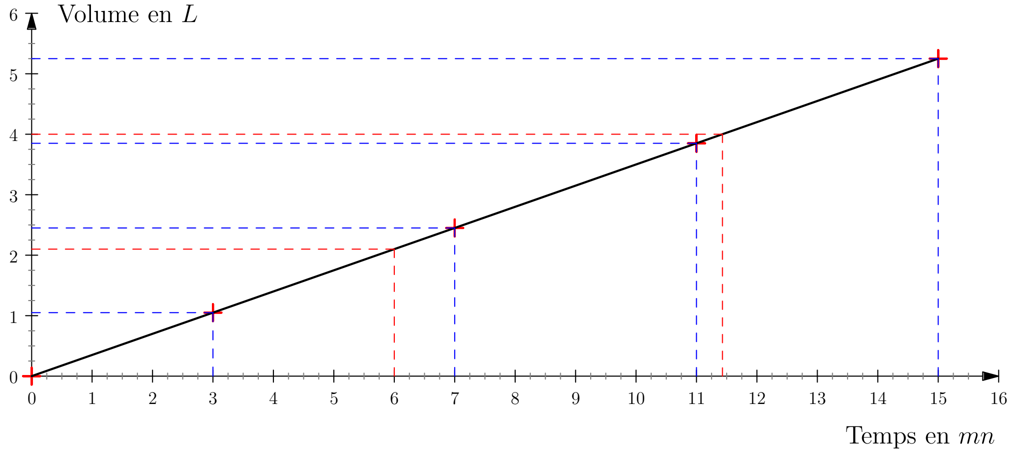
On place un seau vide sous un robinet qui fuit.
On note la quantité d'eau écoulée en fonction du temps dans le tableau ci-dessous.

Temps (en secondes)	0	3	7	11	15
Quantité d'eau (en litres)	0	1,05	2,45	3,85	5,25

1. Représentez graphiquement cette situation.
2. La situation vous semble-t-elle proportionnelle ? Justifiez.
3. Par lecture graphique, sans justification, estimez la quantité d'eau écoulée en 6 secondes ; arrondissez au dixième près.
4. Par lecture graphique, estimez en combien de temps 4 L d'eau se sont écoulés ; arrondissez au dixième près.
5. Par un calcul, estimez le temps nécessaire pour l'écoulement de 670 L d'eau.
6. Par un calcul, estimez la quantité d'eau écoulée en 23 s.

Réponse

1. Ci-dessous, les traits de correction en bleu correspondent aux valeurs du tableau.



2. Les points sont alignés et forment une droite qui passe par l'origine. Donc, la situation semble ...
3. Par lecture graphique, on estime la quantité d'eau écoulée en 6 s à environ ... (traits de construction en rouge).
4. Par lecture graphique, on estime que 4 L d'eau se sont écoulés en ... environ (traits de construction en rouge).
5. La situation est proportionnelle donc nous pouvons calculer le temps t correspondant à l'écoulement de ... d'eau.

Temps (en secondes)	15	t
Quantité d'eau écoulée	5,25	670

$t = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} \approx \dots$

670 L d'eau s'écoulent en approximativement ...

6. La situation est proportionnelle donc nous pouvons calculer la quantité d'eau écoulée en 23 s.

Temps (en secondes)	15	23
Quantité d'eau écoulée	5,25	q

$q = \dfrac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$

En 23 s la quantité d'eau écoulée est de ...

6 Pourcentage

6.1 Appliquer un pourcentage (rappels)

Exercice 6.7

Sur un pot de 240 g de crème fraîche, on peut lire l'inscription : « 30 % de matières grasses ».
Déterminez la quantité de matières grasses présentes dans le pot.

Réponse

Masse de crême fraîche (g)	100	240
Masse de matières grasses (g)	30	x

$\times \ \dots$

$x = \ \dots$

Le pot de crème fraîche contient ... de matières grasses.

Exercice 6.8

Lors des élections des délégués de classe, 28 élèves votent et Anaba obtient 75 % des voix. Combien d'élèves ont voté pour Anaba ?

Réponse

Nombre total de votants	100	28
Nombre de votants pour l'élève	75	y

$\times \ \dots$

$y = \ \dots$

... élèves ont voté pour Anaba.

6.2 Calculer un pourcentage (rappels)

Exercice 6.9

Le stade de football du Camp Nou a une capacité de 99 354 places.
Il a accueilli 69 961 spectateurs lors du match FC Barcelone - Tottenham, le 11 décembre 2018.

Quel était approximativement le pourcentage de sièges occupés, arrondi au dixième ?

Réponse

Nombre total de places	99 354	100
Nombre de places occupées	69 961	z

$\times \ \dots$

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau est :
$c = \ \dots$

Calculons le pourcentage p de sièges occupés.
$p = \ \dots$

Environ ... des sièges du Camp Nou étaient occupés lors de ce match.

6.3 Pourcentage de pourcentages (rappels)

Exercice 6.10
Un article coûte 400 €.
Son prix augmente de 30 %, puis diminue de 30 %.

Quel est son prix final ?

Réponse
Calculons le prix de l'article après une augmentation de 30 %.
$p_1 = \ \dots$
Calculons le montant de la réduction r sur le prix intermédiaire de ...

$r = \ \dots$
Calculons le prix final p_f après réduction.

$p_f = \ \dots$

Le prix final p_f est $\dots$

Remarque

Nous constatons qu'après une augmentation de 30 % puis une réduction de 30 %, le prix final est différent du prix initial.

Exercice 6.11
60 % des 800 élèves d'un collège sont des filles. Parmi celles-ci, 35 % font du ski.

Dans ce collège, combien de filles font du ski ?

Réponse
Calculons n_1 le nombre de filles du collège.
$n_1 = \ \dots$

Calculons le nombre de collégiennes pratiquant le ski.
$n_2 = \ \dots$

$\dots$ collégiennes font du ski.

6.4 Regroupement de pourcentages

Exercice 6.12
Un premier berger guide un troupeau de 120 moutons dont 45 % sont de type Mérinos.
Un second berger guide un troupeau de 140 moutons dont 60 % sont de type Mérinos.

Calculez le pourcentage de moutons Mérinos lorsque les bergers regroupent les deux troupeaux.

Réponse
Calculons le nombre de moutons de type Mérinos du premier troupeau.
$\dots$

Calculons le nombre de moutons de type Mérinos du second troupeau.
$\dots$

Calculons le nombre total de moutons de type Mérinos.

...

Calculons le nombre total de moutons.

...

Calculons le pourcentage global de moutons de type Mérinos.

...

Le pourcentage total de moutons de type Mérinos est d'environ ...

Exercice 6.13

On dispose de 3 sacs qui contiennent des billes bleues et rouges.

- Le sac n° 1 contient 120 billes dont 40 % de billes bleues.
- Le sac n° 2 contient 18 billes bleues soit 30 % du total.
- Le sac n° 3 contient au total 70 billes.

On regroupe les billes des 3 sacs et on constate que 30 % du total des billes sont bleues.

Combien de billes bleues contenait le sac n° 3 au départ ?

Réponse

Calculons le nombre de billes bleues du premier sac.

...

Le premier sac contient ... billes bleues.

Calculons le nombre total de billes du second sac.

...

Le second sac contient au total ... billes.

Calculons le nombre total de billes.

...

Calculons le nombre de billes bleues contenues dans le sac n° 3 au départ.

...

Le sac bleu contient au départ ... billes bleues.