CHAPITRE 5

TRIANGLES

1 Définitions et vocabulaire

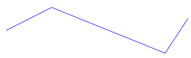
Définition 38 (ligne brisée, ligne courbe)

Une **ligne brisée** est une suite de segments tels que deux segments consécutifs :

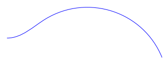
- ont une extrémité commune ;
- ne sont pas alignés.

Une ligne qui n'est ni une ligne droite ni une ligne brisée est appelée une **ligne courbe**.

Exemple



Ligne brisée



Ligne courbe

Définition 39 (polygone)

Un **polygone** est une figure géométrique plane formée par une ligne brisée fermée.

Définition 40 (diagonale)

Dans un polygone, une **diagonale** est une droite qui joint deux sommets non consécutifs.

Définition 41 (triangle)

Un **triangle** est un polygone à trois côtés.
Si $[AB]$ est un côté d'un polygone, la droite (AB) est un **côté prolongé** de ce polygone.

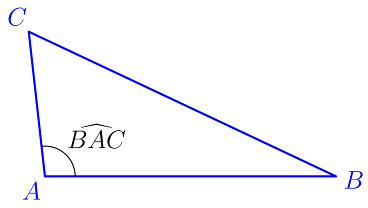
Remarque

Par soucis de simplification, on emploiera le mot *côté* en lieu et place de *côté prolongé*.

Définition 42 (sommet, côté, côté opposé, angle en un sommet)

Dans le triangle ci-contre :

- Le point A est un **sommet**.
- Le segment $[AB]$ est un **côté**.
- Le segment $[AC]$ est le **côté opposé** au sommet B.
- L'angle $\widehat{BAC}$ est l'**angle en** A.



Définition 43 (angles adjacents)

Deux **angles adjacents** sont deux angles :

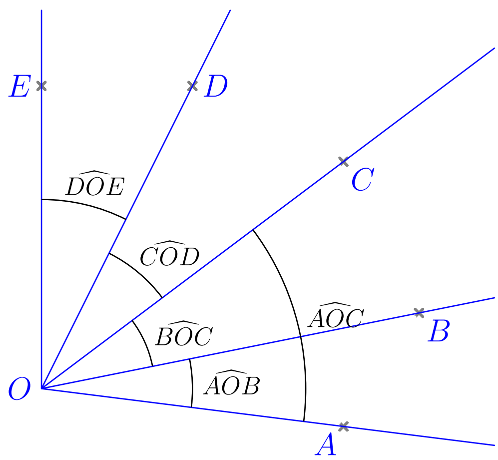
- qui ont le même sommet ;
- qui ont un côté commun ;
- qui sont situés de part et d'autre d'un coté commun.

Exercice 5.1

1. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont ...
2. Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ sont ...
3. Les angles $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOE}$ sont ...

Cependant :

4. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ne sont pas adjacents car ...
5. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ne sont pas adjacents, car ...



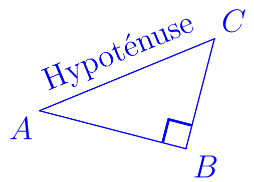
2 Le triangle rectangle

Définition 44 (triangle rectangle, hypoténuse)

Un triangle est un **triangle rectangle** lorsque l'un des angles est droit.

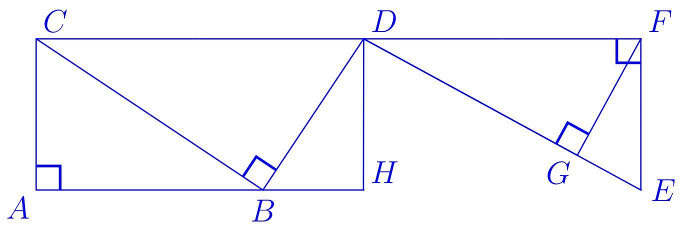
ABC est un triangle rectangle **en** B lorsque ses deux côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires.

Le côté $[AC]$, opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse**.



Exercice 5.2

1. Sur la figure ci-dessous, nommez à l'aide du codage les triangles rectangles.
2. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{FDH}$?
3. Que peut-on dire du triangle FDH ?



Réponse

1.

Codage	Triangle
L'angle $\widehat{BAC}$ est droit.	Le triangle … est rectangle en …
L'angle $\widehat{CBD}$ est droit.	Le triangle … est rectangle en …
L'angle $\widehat{DFE}$ est droit.	Le triangle … est rectangle en …
L'angle $\widehat{DGF}$ est droit.	Le triangle … est rectangle en …

2. Aucun codage n'est associé à l'angle $\widehat{FDH}$.
   On ne peut donc pas affirmer ni supposer que $\widehat{FDH}$ soit un angle droit.

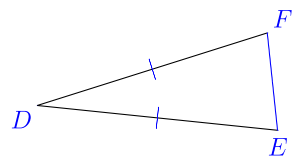
   En fait, cette figure à été réalisée à l'aide d'un ordinateur et $\widehat{FDH} \approx 90{,}095°$.

3. On ne sait pas si l'angle $\widehat{FDH}$ est droit, donc on considère que le triangle FDH n'est pas un triangle rectangle.

3 Le triangle isocèle

Définition 45 (triangle isocèle, sommet principal, base, angles à la base)
Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
On précise toujours en quel sommet le triangle est isocèle. Ici, le triangle DEF est isocèle en D.

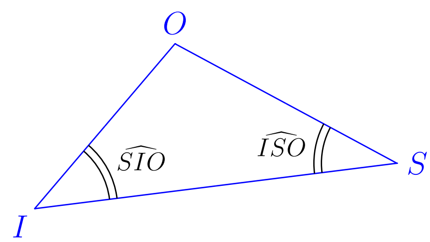
De plus :
- Le point D est le **sommet principal** du triangle.
- le côté $[FE]$ opposé au sommet principal s'appelle la **base** du triangle.
- les angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{EFD}$ sont les **angles à la base**.



Propriété 18 (angles à la base d'un triangle isocèle)
Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base sont égaux.

Propriété 19 (angles à la base d'un triangle isocèle)
Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.

Exercice 5.3
Montrez que le triangle ISO est isocèle.



Réponse :

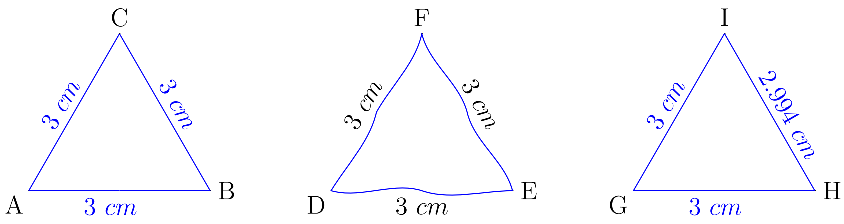
1. Le codage de la figure indique que les angles $\widehat{SIO}$ et $\widehat{ISO}$ ont la même mesure.
   Réalisons un chaînon déductif.

Je sais que :	Propriété :	Conclusion :
Dans le triangle ISO, $\widehat{\ldots} = \widehat{\ldots}$.	Si … alors …	Le triangle ISO est …

4 Le triangle équilatéral

Définition 46 (triangle équilatéral)
Un **triangle équilatéral** est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.

Exercice 5.4
Déterminez si ces triangles sont équilatéraux.



Réponse :

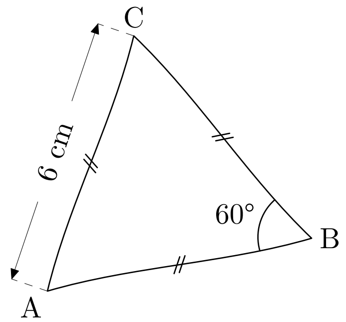
1. D'après le codage, $AB = BC = CA = \ \ldots$
   Les trois côtés du triangle ABC ont la même longueur : c'est donc un triangle $\ \ldots$
2. Le triangle a été tracé à main levée, mais le codage nous assure que $DE = EF = FD = \ \ldots$
   DEF est donc un triangle $\ \ldots$
3. Si l'on mesure ses trois côtés avec une règle, ils semblent mesurer tous 3 cm.
   Cependant, les données de l'exercice indiquent que $GI =$ ... et $HI =$ ...
   Le triangle GHI n'est donc pas un triangle $\ \ldots$

Propriété 20 (angles égaux dans un triangle équilatéral)
Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux à 60°.

Propriété 21 (angles égaux dans un triangle équilatéral)
Si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral.

Exercice 5.5

En justifiant, déterminez les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.



Réponse

Je sais que :
(ABC) est un triangle ...

Propriété :
Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure ...

Conclusion :
$\widehat{BAC} =$ ... et $\widehat{BAC} =$ ...

5 Construire un triangle

5.1 Construire un triangle dont on connaît les trois longueurs

Méthode

Pour tracer un triangle ABC dont on connaît les trois longueurs (AB, AC et BC), on peut adopter le programme de tracé suivant.

1. Choisir deux des sommets du triangle, par exemple A et B.
2. Tracer le segment de droite $[AB]$.
3. Tracer le cercle de centre A et de rayon AC.
4. Tracer le cercle de centre B et de rayon BC.

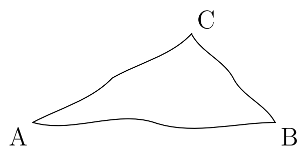
Le point C est alors à l'intersection des deux cercles (deux solutions sont possibles).

Exercice 5.6

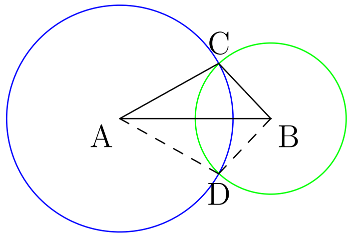
1. Faites un schéma à main levée d'un triangle de longueurs 2 cm, 1,5 cm et 1 cm.
2. Tracez le triangle en utilisant le programme de construction ci-dessus.

Réponse

1. Je choisis de nommer :
   - A et B les sommets tels que $AB =$ ....
   - C le troisième sommet, avec $BC =$ ..., et donc $AC =$ ....



2. Dans le triangle ci-contre :
   a. Je trace le segment $[AB]$ avec $AB =$ . . . .
   b. Je trace le cercle de centre . . . et de rayon . . . .
   c. Je trace le cercle de centre . . . et de rayon . . . .
   d. Je place le point . . . à l'une des intersections des deux cercles.



En plaçant le point D à l'autre intersection des deux cercles, on peut remarquer que les trois longueurs du triangle ABD mesurent 2 cm, 1,5 cm et 1 cm.

5.2 Construire un triangle dont on connaît un côté et deux angles

Méthode

Pour tracer un triangle ABC dont on connaît une longueur et deux angles, on peut utiliser la règle graduée et le compas comme dans l'exemple ci-après.

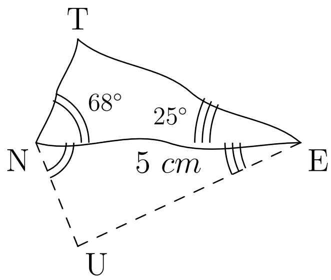
Exercice 5.7

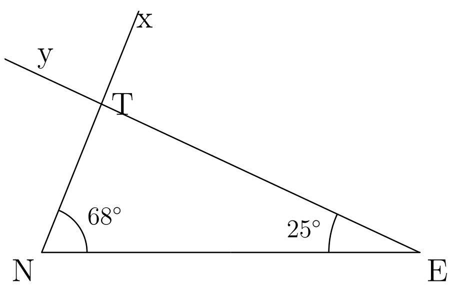
On veut tracer un triangle NET sachant que $NE = 5\,\text{cm}$, $\widehat{TNE} = 68°$ et $\widehat{NET} = 25°$.

1. Faites un schéma à main levée.
2. Tracez le triangle à l'aide de la règle graduée et du compas.

Réponse

1. Voir ci-contre le schéma à main levée.
2. Traçons le triangle NET.
   – Avec la règle graduée, je trace le segment $[NE]$ de longueur $NE =$ . . .
   – Avec le rapporteur et la règle, je trace la demi-droite $[Nx)$ telle que $\widehat{TNE} =$ . . .
   – Avec le rapporteur et la règle, je trace la demi-droite $[Ey)$ telle que $\widehat{NET} =$ . . .





Remarquons que le triangle NEU est également tel que $NE = 5\,\text{cm}$, $\widehat{UNE} = 68°$ et $\widehat{NEU} = 25°$.

5.3 Construire un triangle isocèle dont on connaît un côté et un angle à la base

Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base ont la même mesure.
On peut donc utiliser la méthode « construire un triangle dont on connaît un côté et deux angles ».

5.4 Construire un triangle isocèle dont on connaît la base et un autre côté

Dans un triangle isocèle, les deux côtés adjacents à la base ont la même longueur.
On connaît alors les trois côtés du triangle, et peut donc utiliser la méthode « construire un triangle dont on connaît trois côtés ».

6 Les trois hauteurs d'un triangle

Définition 47 (hauteurs d'un triangle)

Dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé.

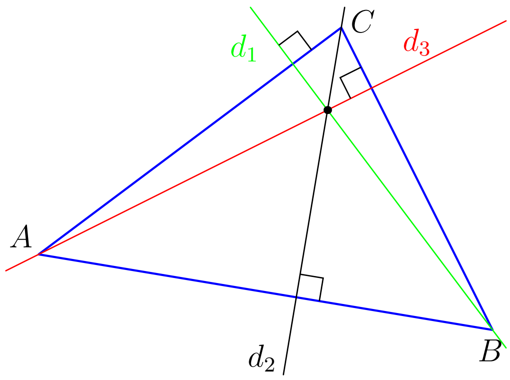
On dit que cette hauteur est **issue** du sommet.

Remarque

Un triangle comporte trois hauteurs : une pour chacun des sommets.

Exercice 5.8

Dans le triangle ABC ci-dessous, nommez les hauteurs issues de chacun des trois sommets.



Réponse

La droite d_1 est la hauteur issue de ...
La droite d_2 est la hauteur issue de ...
La droite d_3 est la hauteur issue de ...