

CHAPITRE 10

DIVISION EUCLIDIENNE ET DÉCIMALE

1 Divisibilité

1.1 Vocabulaire

Définition 67 (diviseur, divisible, multiple)

Dans cet exemple : $56 = 8 \times 7$.

Les nombres 7 et 8 sont des **diviseurs** de 56.

Le nombre 56 est **divisible** par 7 et par 8. C'est aussi un **multiple** de 7 et de 8.

Exercice 10.1

Faites une ou plusieurs phrases avec les mots « diviseur », « divisible » et avec les nombres 5, 7 et 35.

Réponse

- Les nombres ... et ... sont des diviseurs de ...
- Le nombre ... est divisible par les nombres ... et ...

Définition 68 (division euclidienne)

Effectuer la **division euclidienne** de 89 (le **dividende**) par 6 (le **diviseur**), c'est trouver deux nombres entiers, le **quotient** et le **reste**, tels que :

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}.$$

Et tels que le reste de la division est inférieur au diviseur :

$$89 = 6 \times 14 + 5.$$

Exercice 10.2

a. $56 = \dots \times 4 + \dots$

Dans la division euclidienne de 56 par 4, le dividende est $\dots$, le diviseur est $\dots$, le quotient est $\dots$ et le reste est $\dots$

b. $23 = \dots \times 5 + \dots$

Dans la division euclidienne de 23 par 5, le dividende est $\dots$, le diviseur est $\dots$, le quotient est $\dots$ et le reste est $\dots$

c. $481 = \dots \times 3 + \dots$

Dans la division euclidienne de 481 par 3, le dividende est $\dots$, le diviseur est $\dots$, le quotient est $\dots$ et le reste est $\dots$

Posons ces trois divisions :

$$\begin{array}{r|l} 56 & 4 \\ -4 & 14 \\ \hline 16 & \\ -16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ -20 & 4 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 481 & 3 \\ -3 & 160 \\ \hline 18 & \\ -18 & \\ \hline 01 & \\ -0 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

2 Critères de divisibilité**Propriété 45 (critère de divisibilité par 2)**

Un nombre entier est **divisible par 2** s'il est pair, donc si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exercice 10.3

Le nombre 37, le nombre 571936 et le nombre 2222,2 sont-ils divisibles par 2 ?

Réponse

a. Le nombre 37 ne se termine pas par 0, 2, 4, 6 ou 8 donc $\dots$

b. Le chiffre des unités de 571936 est 6, donc $\dots$

c. Le nombre 2222,2 n'est pas un nombre entier : il $\dots$

Propriété 46 (critère de divisibilité par 5)

Un nombre entier est **divisible par 5** si le chiffre des unités est 0 ou 5.

Exercice 10.4

Les nombres 230 et 5554 sont-ils divisibles par 5 ?

Réponse

- a. Le nombre 230 se termine par 0 donc ...
- b. 5554 ne se termine ni par 0, ni par 5, donc ...

Propriété 47 (critère de divisibilité par 10)

Un nombre entier est **divisible par 10** si le chiffre des unités est 0.

Exercice 10.5

Les nombres 980 et 1000 005 sont-ils divisibles par 10 ?

Réponse

- a. Le nombre 980 se termine par 0 donc ...
- b. Le chiffre des unités de 1000 005 n'est pas 0, donc ...

Propriété 48 (critère de divisibilité par 3)

Un nombre entier est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exercice 10.6

Les nombres 114 et 231 452 sont-ils divisibles par 3 ?

Réponse

- a. Déterminons si 114 est divisible par 3.
 $1 + 1 + 4 = 6$.
 La somme des chiffres de 114 est divisible par ... , donc ...
- b. 231 452 est-il divisible par 3 ?
 $2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 2 = 17$.
 La somme des chiffres de 231 452 n'est pas divisible par ... , donc ...

Propriété 49 (critère de divisibilité par 9)

Un nombre entier est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice 10.7

Les nombres 432 et 3 259 sont-ils divisibles par 9 ?

Réponse

- a. Le nombre 432 est-il divisible par 9 ?

$$4 + 3 + 2 = \dots$$

La somme des chiffres de 432 est divisible par $\dots$, donc 432 est $\dots$

- b. Déterminons si 3 259 est divisible par 9.

$$3 + 2 + 5 + 9 = \dots$$

La somme des chiffres de 3 259 n'est pas divisible par $\dots$, donc 3 259 $\dots$

Propriété 50 (critère de divisibilité par 4)

Un nombre est **divisible par 4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.

Exercice 10.8

Les nombres 7 532 et 4 414 sont divisibles-ils par 4 ?

Réponse

- a. Le nombre 7 532 est-il divisible par 4 ?

Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 7 532 est $\dots$

$\dots$ est un multiple de $\dots$, donc 7 532 est $\dots$

- b. Le nombre 4 414 est-il divisible par 4 ?

Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 4 414 est $\dots$

$\dots$ n'est pas un multiple de $\dots$, donc 4 414 $\dots$

Résumons l'ensemble de ces critères de divisibilité d'un nombre entier dans un tableau.

Diviseur	Critère de divisibilité
2	Le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5.
10	Le chiffre des unités est 0.
3	La somme des chiffres du nombre est divisible par 3.
9	La somme des chiffres du nombre est divisible par 9.
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres du nombre testé est lui-même divisible par 4.

3 La division décimale

Définition 69 (division décimale)

Soit a un nombre (entier ou décimal) et b un nombre entier non nul.

La **division décimale** du nombre a par le nombre b permet de calculer le quotient exact de a par b ou une valeur approchée de celui-ci.

Définition 70 (écriture fractionnaire)

Soit a un nombre (entier ou décimal) et b un nombre entier non nul.

Le **quotient** exact de a par b peut se noter de deux façons :

$$a \div b \qquad \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}$ est l'**écriture fractionnaire** du quotient de a par b .

Exercice 10.9

Posez et effectuez, si possible, les divisions décimales suivantes :

- a. $23 \div 8$.
- b. $13 \div 3$.
- c. $23 \div 7$.

Réponse

Posons ces divisions.

$\begin{array}{r} 23 \\ - 16 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 2,875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ - 12 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4,333 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ - 21 \\ \hline 20 \\ - 14 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 35 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 3,285 \end{array}$
--	--	---	--	--	--

a. $23 \div 8 = 2,875$.

Le quotient exact de la division décimale de 23 par 8 est 2,875.

b. $13 \div 3 \approx 4,333$.

Le quotient approché de la division décimale de 13 par 3 est 4,333.

c. $23 \div 7 \approx 3,286$.

Le quotient approché de la division décimale de 23 par 7 est 3,286.

Remarque

En continuant les deux dernières divisions on obtiendrait de meilleures approximations, par exemple :

- $13 \div 3 \approx 4,333\ 333\ 333\ 333\ 33$.
- $23 \div 7 \approx 3,285\ 714\ 285\ 714\ 29$.

Propriété 51 (multiplier, diviser numérateur et dénominateur par ...)

On ne change pas le quotient de deux nombres décimaux quand on multiplie chacun d'eux par un même nombre (en particulier, par 10, par 100 ou par 1 000).

Remarque

Cette propriété permet de transformer une division lorsque le diviseur est un nombre décimal.

Propriété 52 (division par 10, 100 ou 1 000)

Pour diviser un nombre par :	On décale la virgule de ce nombre de :
10	1 rang vers la gauche.
100	2 rangs vers la gauche.
1000	3 rangs vers la gauche.

4 Conversion de durée

4.1 Conversion de secondes en minutes et secondes

Exercice 10.10

Convertissez 317 secondes en minutes et secondes.

Réponse

Une minute comporte 60 secondes.

La division euclidienne de 317 par 60 me donnera :

- comme quotient, le nombre de minutes dans 317 secondes ;
- comme reste, le nombre de secondes résiduel.

$$\begin{array}{r|l} 317 & 60 \\ -300 & 5 \\ \hline 17 & \end{array}$$

Effectuons donc la division euclidienne de 317 par 60.

Conclusion : $317\text{s} = \dots \text{ min} + \dots \text{ s}$.

4.2 Conversion de secondes en heures, minutes et secondes

Exercice 10.11

Convertir 8 017 secondes en heures, minutes et secondes.

Réponse

- Première étape :

Commençons, comme précédemment, par convertir ce nombre de secondes en minutes et secondes.

$$\begin{array}{r|l} 8017 & 60 \\ -60 & 133 \\ \hline 201 & \\ -180 & \\ \hline 217 & \\ -180 & \\ \hline 37 & \end{array}$$

$8017 \text{ s} = \dots \text{ min } \dots \text{ s}$.

- Seconde étape :

Convertissons 133 minutes en heures et minutes, en remarquant qu'une heure comporte 60 minutes.

La division euclidienne de 133 minutes par 60 me donnera :

- comme quotient, le nombre d'heures dans 133 minutes ;
- comme reste, le nombre de minutes résiduelles.

$$\begin{array}{r|l} 133 & 60 \\ -120 & 2 \\ \hline 13 & \end{array}$$

Je convertis ainsi 133 minutes en $\dots$ heures et $\dots$ minutes.

- Conclusion :

$8017 \text{ s} = \dots \text{ h} + \dots \text{ min} + \dots \text{ s}$.

Exercice 10.12

L'horloge interne d'une voiture robot autonome indique que celle-ci a roulé pendant une durée de 53 008 secondes avant de s'arrêter.

Convertissez cette durée en heures, minutes et secondes.

Réponse

- Première étape :

Je convertis 53 008 secondes en minutes et secondes.

$$\begin{array}{r|l} 53008 & 60 \\ -480 & 883 \\ \hline 500 & \\ -480 & \\ \hline 208 & \\ -180 & \\ \hline 28 & \end{array}$$

53 008 secondes représentent ... minutes et ... secondes.

- Seconde étape :

Je convertis 883 minutes en heures et minutes.

$$\begin{array}{r|l} 883 & 60 \\ -60 & 14 \\ \hline 283 & \\ -240 & \\ \hline 43 & \end{array}$$

883 minutes représentent ... et ... minutes.

- Conclusion :

53 008 s = ... h + ... min + ... s.

4.3 Conversion d'heures en semaines, jours et heures

Exercice 10.13

Convertissez 631 heures en semaines, jours et heures.

Réponse

- Première étape :

Un jour comporte 24 heures.

La division euclidienne de 631 par 24 donnera :

$$\begin{array}{r|l} 631 & 24 \\ -48 & 26 \\ \hline 151 & \\ -144 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

- comme quotient, le nombre de jours dans 631 heures.

- comme reste, le nombre d'heures résiduelles.

631 heures correspondent donc à ... jours et ... heures.

- Seconde étape :

Pour convertir 26 jours en semaines, observons qu'une semaine comporte 7 jours.

La division euclidienne de 26 par 7 donnera :

$$\begin{array}{r|l} 26 & 7 \\ -21 & \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

– comme quotient, le nombre de semaines dans 26 jours.

– comme reste, le nombre de jours résiduels.

26 jours correspondent donc à ... semaines et ... jours.

– Conclusion :

631 h = ... semaines + ... jours + ... h.