CHAPITRE 14

PROPORTIONNALITÉ

1 Rappels

1.1 Définition

Définition 82 (grandeurs proportionnelles)
Soient deux grandeurs liées.
Si en multipliant toujours par le même nombre non-nul les valeurs de l'une, on obtient les valeurs de l'autre, alors ces grandeurs sont dites **proportionnelles**.

1.2 Propriété de linéarité multiplicative

Exercice 14.1
Adrian achète 6 kg de pommes de terre et les paie 10,80 €. Hendrike doit en acheter 30 kg.

a. Quelles sont les grandeurs étudiées ?

b. Par quel nombre faut-il multiplier la quantité de pommes de terre achetée par Adrian pour obtenir la quantité achetée par Hendrike ?

c. Rassemblez les données du problème dans un tableau.

d. Sachant que le prix des pommes de terre est proportionnel à leur masse, par combien faut-il multiplier le prix payé par Adrian pour obtenir le prix à payer par Hendrike ?

e. Calculez le prix payé par Hendrike.

f. Complétez le tableau.

Réponse

a. Les grandeurs étudiées sont :

- ...
- ...

b. On recherche le nombre qui, multiplié par 6, donnera un produit de 30 selon le schéma suivant.

$$6 \times \text{nombre} = 30.$$

Ce nombre est le quotient de la division de ... par ... .

$\frac{\dots}{\dots} = \dots$

Hendrike achète ... fois plus de pommes de terre qu'Adrian.

c. Représentons :

- la première grandeur étudiée (masse des pommes de terre en kg) sur la première ligne d'un tableau ;
- la seconde grandeur (prix des pommes de terre en €) sur la seconde ligne de ce tableau.

$\times \dots$

Quantité de pommes de terre en kg	6	30
Prix des pommes de terre en €	10,80	?

$\times ?$

d. La situation est proportionnelle et Hendrike achète ... fois plus de pommes de terre qu'Adrian.

Elle paiera donc ... fois plus cher.

e. Je calcule le prix payé par Hendrike.

$10,80 \times \dots = \dots$

Hendrike paie donc ... €.

f. Nous pouvons maintenant compléter le tableau, en utilisant la **propriété de linéarité multiplicative**.

Quantité de pommes de terre en kg	6	30
Prix des pommes de terre en €	10,80	...

1.3 Propriété de linéarité additive

Exercice 14.2

Kimia et Longi constituent chacun une chaîne de dominos.
Ils remarquent que la longueur d'une chaîne est proportionnelle au nombre de dominos qui la constitue.

Avec 7 dominos, Kimia a formé une chaîne de 16,1 cm.

Avec 12 dominos, Longi a formé une chaîne de 27,6 cm.
Il mettent bout à bout les deux chaînes et souhaitent connaître le nombre de dominos et la longueur de la nouvelle chaîne ainsi formée.

– Complétez ce tableau, en remplaçant les points d'interrogation à l'aide des données du problème.

Nombre de dominos	?	?	
?	?	?	

– Expliquez comment calculer la longueur totale obtenue avec l'ensemble des dominos.

– Effectuez ce calcul et compléter le tableau.

Réponse

La longueur d'une chaîne est proportionnelle au nombre de dominos qui la compose.
Si on additionne deux chaînes de 12 et 7 dominos, alors :

– Le nombre total de dominos est la somme du nombre de dominos des deux chaines.

  $\ldots + \ldots = \ldots$

– La longueur totale est la somme des longueurs des deux chaines.

  $16{,}1 + 27{,}6 = \ldots$

  La nouvelle chaîne mesure **...**

On applique ainsi la **propriété de linéarité additive**.

Nombre de dominos	...	...	...
Longueur totale en cm	...	...	...

1.4 Retour à l'unité

Exercice 14.3

Sur un site de musique en ligne, toutes les chansons sont vendues au même prix.
Romane achète 7 chansons pour 10,22 €.

a. Quelles sont les grandeurs étudiées ?

b. Combien coûte 1 chanson ?

c. Combien coûtent 12 chansons ?

d. Représentez la situation dans un tableau.

Réponse

a. Les grandeurs étudiées sont :

...

– ...

b. Une chanson coûte ... fois moins que 7 chansons.

Je calcule son prix.

$\frac{10,22}{7 \ldots} = \ldots$

Une chanson coûte **...**

c. Je viens de calculer le prix d'une unité (une chanson). Je vais maintenant multiplier ce prix par 12 pour calculer le prix de 12 unités, en utilisant ainsi la méthode du **retour à l'unité**.

Je calcule le prix de 12 chansons.

Elles coûtent 12 fois plus cher qu'une chanson.

$12 \times \ldots = \ldots$

Douze chansons coûtent ...

d. Voici le tableau représentant cette situation de proportionnalité.

Nombre de chansons	1	7	12
Prix des chansons (en €)	...	10,22	...

2 Reconnaître une situation de proportionnalité

Remarque

Deux grandeurs liées ne sont pas toujours proportionnelles.

En particulier, le fait que l'on présente dans un tableau les valeurs de ces deux grandeurs n'en garantit pas la proportionnalité.

Exercice 14.4

Zian a noté dans un tableau les prix pour différentes quantités de croix de Savoie (ce sont des viennoiseries) chez la boulangère.

Nombre de croix de Savoie	1	4	9
Prix (en €)	1,30	5	11

Le prix à payer est-il proportionnel au nombre de croix de Savoie achetées ?

Réponse
Si le prix à payer est proportionnel aux nombre de viennoiseries achetées, quatre croix de Savoie doivent coûter quatre fois plus cher qu'une seule.

$4 \times \ \ldots \ = \ \ldots$

Les 4 viennoiseries devraient coûter ... €.

D'après le tableau, quatre croix de Savoie ne coûtent pas ... € mais ... €.

Le prix des croix de Savoie n'est donc ... proportionnel au nombre acheté.

Exercice 14.5

La taille d'une personne est-elle proportionnelle à son âge ?

Réponse
Les grandeurs étudiées sont :

- ...
- ...

Ces grandeurs sont-elles liées ? Oui, si l'on considère que la taille d'une personne évolue avec le temps.

Ces grandeurs sont-elle proportionnelles ?

Réfléchissons :

- Si la taille d'une personne est proportionnelle à son âge, à 10 ans cette taille devrait être ... fois plus grande qu'à un an.
- Prenons un enfant qui, à l'âge d'un an, mesure 75 cm.
- Je calcule sa taille à 10 ans, qui devrait donc être 10 fois plus grande.
  $10 \times \ \ldots \ = \ \ldots$
- L'enfant devrait donc mesurer ... cm soit ... m, ce qui nous semble impossible.

En conclusion, la taille d'une personne ... proportionnelle à son âge.

3 Coefficient de proportionnalité

Propriété 63 (coefficient de proportionnalité)
On considère deux grandeurs proportionnelles.

Le nombre par lequel on multiplie une grandeur pour obtenir la seconde s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Dans un **tableau de proportionnalité**, chaque nombre de la seconde ligne est obtenu en multipliant chaque nombre de la première ligne par un même nombre : le coefficient de proportionnalité.

Exercice 14.6

Sachant que le prix des fraises est proportionnel à la quantité vendue, on veut compléter le tableau suivant.

Masse de fraises (en kg)	2	3	5	7		
Prix des fraises (en €)		11,70			35,10	46,80

$\div \ldots$

$\times \ldots$

a. Calculez le coefficient de proportionnalité.

b. Calculez le prix de $2\,\mathrm{kg}$, $5\,\mathrm{kg}$ et $7\,\mathrm{kg}$ de fraises.

c. Calculez les quantités de fraises vendues au prix de $35{,}10\,€$ et de $46{,}80\,€$.

Réponse

a. La troisième colonne du tableau est complète.
Elle nous indique que $3\,\mathrm{kg}$ de fraises coûtent $11{,}70\,€$.
Je peux ainsi calculer le coefficient de proportionnalité c.

$$c = \frac{\ldots}{\ldots} = \ \ldots\ .$$

b. Je connais la quantité de fraises, en la multipliant par le coefficient, j'obtiens son prix de vente.

- Pour 2 kg : $2 \times \ \ldots\ = \ \ldots$
  Donc $2\,\mathrm{kg}$ de fraises coûtent $\ldots$
- Pour 5 kg : $5 \times \ \ldots\ = \ \ldots$
  Donc $5\,\mathrm{kg}$ de fraises coûtent $\ldots$

- Pour 7 kg : $7 \times \dots = \dots$

  Donc $7\,\mathrm{kg}$ de fraises coûtent $\dots$

c. Je connais prix de vente et je détermine la quantité correspondante de fraises en divisant ce prix par le coefficient de proportionnalité.

- Je calcule la quantité de fraises vendue au prix de $35{,}10$ €.

  $\dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

  Donc, pour $35{,}10$ € de fraises on obtient une quantité de $\dots$

- Je calcule la quantité de fraise vendue au prix de $46{,}80$ €.

  $\dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

  Donc, pour $46{,}80$ € de fraises on obtient une quantité de $\dots$

d. Je complète le tableau de proportionnalité.

Masse (en kg)	2	3	5	7	...	...
Prix (en €)	...	11,70	...	...	35,10	46,80

Exercice 14.7

Pour 6 objets identiques on paie $28{,}80$ €. Combien coûteraient 15 objets ?

Réponse

Dans ce genre d'énoncé, le terme « identique » nous indique que le prix des objets est proportionnel à la quantité achetée.

Connaissant le prix de 6 objets, je peux calculer le coefficient de proportionnalité.

$c = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$

Je peux maintenant calculer le prix de 15 objets.
$15 \times \dots = \dots$

Le prix de 15 objets est $\dots$

Exercice 14.8

Dans une cantine scolaire, un pâtissier dispose d'une recette qui indique que pour réaliser un gâteau pour 15 personnes, il faut 8 œufs.
Le pâtissier doit faire un gâteau pour 26 élèves. Combien d'œufs doit-il utiliser ?

Réponse

Le nombre d'œufs est proportionnel aux nombre d'élèves.

Je calcule le coefficient de proportionnalité.
$c = \frac{\dots}{\dots}$.

Je calcule le nombre d'œufs nécessaire pour 26 élèves, en arrondissant la valeur obtenue à l'entier supérieur si nécessaire.

$$26 \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{26 \times \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \approx \dots \approx \dots$$

Le cuisinier doit prendre **...** œufs pour sa recette.

Réalisons un tableau de proportionnalité.

Nombre d'élèves	15	26
Nombre d'œufs	8	$\frac{\dots}{\dots} \approx \dots$

$\div \frac{\dots}{\dots}$

$\times \frac{\dots}{\dots}$