CHAPITRE 2
CALCUL LITTÉRAL

1 Conventions d'écriture

Définition 6 (expression littérale)
Une **expression littérale** est une expression qui contient une ou plusieurs lettres, et où chaque lettre représente un nombre.

Exercice 2.1
Complétez le tableau suivant :

Expression	Signification de l'expression et des lettres
$c \times c$	...
$c \times c \times c$	...
$2 \times \pi \times r$	...
$2 \times (L + l)$	...
$L \times l$	...

Définition 7 (carré d'un nombre)
On appelle **carré** du nombre x le produit $x \times x$.

On note $x \times x = x^2$ et on lit « x au carré » ou « x puissance 2 ».

Définition 8 (cube d'un nombre)
On appelle **cube** du nombre x le produit $x \times x \times x$.

On note $x \times x \times x = x^3$ et on lit « x au cube » ou « x puissance 3 ».

Notation (alléger les écritures)

Le signe de la multiplication « $\times$ » disparaît ou est remplacé par un point dans les cas suivants : entre deux lettres, entre un nombre et une lettre ou entre des nombres (ou des lettres) et des parenthèses.

Exercice 2.2

Complétez les écritures suivantes :

Périmètre d'un rectangle de dimensions L et l :	$2 \times (L + l) = \quad \ldots$
Aire d'un cercle de rayon r :	$\pi \times r \times r = \quad \ldots$
Volume d'un cube de côté c :	$c \times c \times c = \quad \ldots$

Notation (quand conserver le signe « $\times$ »)

Dans une expression, on conserve le signe « $\times$ » de la multiplication pour distinguer deux nombres ou pour séparer les opérateurs "$\times$" et "$-$".

Remarque

Le produit de (4) par (-5) ne s'écrit jamais « 4×-5 » mais « $4 \times (-5)$ ».

Notation (ordre des facteurs d'un produit)

Les facteurs d'un produit s'écrivent dans l'ordre suivant : les nombres, puis les lettres dans l'ordre alphabétique et enfin les parenthèses.

Exercice 2.3

Simplifiez :

1. $y \times x = \quad \ldots$
2. $c \times d \times b \times a = \quad \ldots$
3. $2 \times u \times 5 \times t = \quad \ldots$
4. $(x + 1) \times 3 \times x = \quad \ldots$

Notation (en fonction de x)

Écrire un résultat **en fonction de** x, c'est l'écrire à l'aide d'une expression littérale avec x.

Exercice 2.4

a L'aire d'un carré *en fonction* de son côté x est donnée par l'expression $\ldots$

b Le volume d'une sphère *en fonction* de son rayon r est donné par $\ldots$

2 Distributivité simple

Définition 9 (distributivité de la multiplication)
Soient a, b, et k trois nombres relatifs :

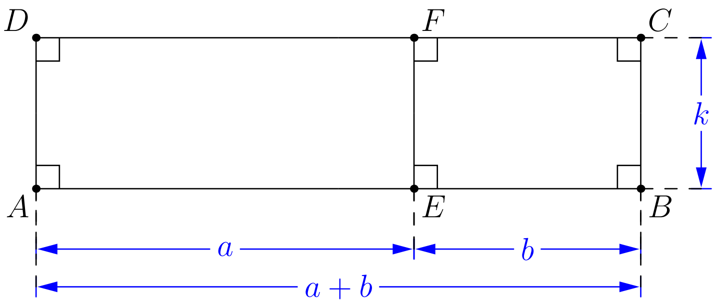
$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b.$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

Le nombre k est ici le **facteur commun**.
On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Démonstration

Démontrons « géométriquement » la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour des nombres positifs ou nuls.
Dans la figure ci-dessous, a, b et k sont des longueurs, donc $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $k \geq 0$.



Exprimons l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de ses dimensions k et $(a + b)$:
$\mathcal{A}_{ABCD} = k \times (a + b)$.

L'aire de $ABCD$ est aussi égale à la somme des aires des rectangles $AEFD$ et $EBCF$.
$\mathcal{A}_{AEFD} = k \times a$
$\mathcal{A}_{EBCF} = k \times b$
$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AEFD} + \mathcal{A}_{EBCF} = k \times a + k \times b$.

On en déduit l'égalité :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b.$$

Nous avons donc démontré, par une approche géométrique, cette égalité lorsque k, a et b sont des nombres positifs ou nuls. ◼

3 Développer une expression

Définition 10 (développer une expression)
Développer, c'est transformer un produit en somme.
Pour développer une expression, on peut utiliser la distributivité simple.

Exercice 2.5
Développez les expressions suivantes :

A. $= 3(a + b) = \ \ldots$

B. $= 2(x + 5) = \ \ldots$

C. $= 5(3x + 5) = \ \ldots$

D. $= 7(2t + 3u) = \ \ldots$

E. $= 4(2x + y + 3z) = \ \ldots$

F. $= 10(a - 3) = \ \ldots$

G. $= 4(-x + 1) = \ \ldots$

H. $= 8(-a + 2b - 3c - d) = \ \ldots$

4 Réduire un produit

Définition 11 (réduire un produit)
Réduire un produit, c'est l'écrire avec le moins de facteurs possibles.

Pour réduire un produit on peut permuter l'ordre des facteurs.

Exercice 2.6
Réduisez les produits suivants :

1. $a \times b \times a$.
2. $2 \times u \times 5 \times t$.
3. $c \times c$.
4. $c \times c \times c$.
5. $b \times 5 \times a \times a \times b \times a$.
6. $(x+1) \times (x+1) \times (x+1)$.

Réponse

1. $a \times b \times a = \ \ldots$
2. $2 \times u \times 5 \times t = \ \ldots$
3. $c \times c = \ \ldots$
4. $c \times c \times c = \ \ldots$
5. $b \times 5 \times a \times a \times b \times a = \ \ldots$
6. $(x + 1) \times (x + 1) \times (x + 1) = \ \ldots$

5 Réduire une somme algébrique

Définition 12 (réduire une somme algébrique)

Réduire une somme algébrique, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

Pour réduire une somme, on peut utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exercice 2.7

Réduisez si possible les expressions suivantes :

$\mathrm{A} = 3x + 5x = \ldots$

$\mathrm{B} = 7a + a = \ldots$

$\mathrm{C} = 10t - 3t = \ldots$

$\mathrm{D} = 20x - 6x = \ldots$

$\mathrm{E} = 2a + 1 = \ldots$

$\mathrm{F} = 3x^2 + 2x^2 = \ldots$

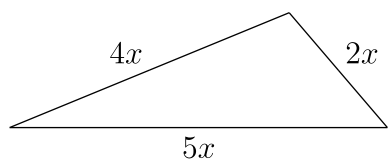
$\mathrm{G} = 3x^2 + 11x = \ldots$

$\mathrm{H} = 2a + 3 + a + 9 = \ldots$

$\mathrm{I} = 3b - 2a - 4b - a = \ldots$

Exercice 2.8

Exprimez le périmètre $\mathcal{P}$ d'un triangle dont les côtés mesurent respectivement $5x$, $4x$ et $2x$.



Réponse

$\mathcal{P} = \ldots$
$\mathcal{P} = \ldots$
$\mathcal{P} = \ldots$

6 Factoriser avec la distributivité simple

Définition 13 (factoriser)

Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Propriété 21 (factoriser avec la distributivité simple)

Si une somme algébrique comporte un facteur commun, alors on peut utiliser la distributivité simple pour la factoriser.

Exercice 2.9

Factorisez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{A} &= 3\times x+3\times 2 = \ \dots\\
\text{B} &= 5\times 3-5\times a = \ \dots\\
\text{C} &= 7\times t-7\times w+7\times 3 = \ \dots\\
\text{D} &= 10\times x-5\times y = \ \dots\\
\text{E} &= x^2+5x = \ \dots\\
\text{F} &= 3abc+2ab = \ \dots
\end{aligned}$$

7 Calculer la valeur d'une expression littérale

Méthode

Pour calculer la valeur d'une expression littérale, il faut donner une valeur à chaque lettre figurant dans l'expression.

Exercice 2.10

1. Calculez la valeur de chacune des expressions suivantes pour $x=-2$.

   $\text{A} = 10x+2.$ $\quad$ $\text{C} = 10x^2+x-1.$

   $\text{B} = 3-4x.$ $\quad$ $\text{D} = x(x-1)(x-2).$

2. Calculez la valeur de chacune des expressions suivantes pour $a=10$ et $b=-1$.

   $\text{E} = 5a^2+3ab+b^2.$ $\quad$ $\text{F} = (2a-3b)(a+b).$

3. Calculez l'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle de longueur $t+5$ et de largeur $t+1$ pour $t=4\,\text{cm}$.

Réponse

1. $$\begin{aligned}
\text{A} &= 10x+2 = \ \dots\\
\text{B} &= 3-4x = \ \dots\\
\text{C} &= 10x^2+x-1 = \ \dots\\
&= \ \dots\\
\text{D} &= x(x-1)(x-2) = \ \dots\\
&= \ \dots
\end{aligned}$$

2. Pour $a = 10$ et $b = -1$:

$$\begin{aligned} \text{E} &= \ldots \\ &= \ldots \\ \text{F} &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

3. Pour $t = 4\,\text{cm}$:
   $\mathcal{A} = \ \ldots$
   L'aire du rectangle mesure $\ \ldots$

8 Égalité de deux expressions

Définition 14 (expressions égales)
Deux expressions littérales sont dites **égales** si elles sont égales pour toutes les valeurs de la lettre (ou des lettres) figurant dans l'expression.

Méthode
Pour montrer que deux expressions sont égales, on peut les développer et les réduire.

Exercice 2.11

1. Exprimez sous forme d'un produit l'aire $\mathcal{A}_1$ d'un rectangle de dimensions $3x$ et $(2x + 4)$.
2. Même question pour l'aire $\mathcal{A}_2$ d'un rectangle de dimensions 6 et $(x^2 + 2x)$.
3. Déterminez si les aires de ces deux rectangles sont égales.

Réponse

1. $\mathcal{A}_1 = 3x \times (2x + 4)$.
2. $\mathcal{A}_2 = 6 \times (x^2 + 2x)$.
3. Développons :
   $\mathcal{A}_1 = \ \ldots$
   $\mathcal{A}_2 = \ \ldots$

   On constate que les expressions développées et réduites de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.
   Les aires des deux rectangles sont donc égales.

Propriété 22 (montrer que deux expressions sont différentes)
Si, pour au moins une valeur, deux expressions prennent des valeurs différentes, alors ces expressions ne sont pas égales.

Exercice 2.12

Le nombre x est un nombre relatif.
$A = (2x + 3)(x + 4)(5x + 1)$.
$B = (3x + 2)(x + 5)(4x + 1)$.

Montrez que les expressions littérales A et B ne sont pas égales.

Réponse

Calculons la valeur de A et celle de B pour $x = 0$:

$A = \ \ldots$
$B = \ \ldots$

Pour $x = 0$, les valeurs de A et de B sont différentes, donc les expressions A et B ne sont pas égales.

9 Suppression de parenthèses

Propriété 23 (opposé d'une somme algébrique)
L'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme des opposés de ses termes.
En particulier :

$$-(a + b) = -a - b.$$

$$-(a - b) = -a + b.$$

$$-(-a + b) = a - b.$$

$$-(-a - b) = a + b.$$

Exercice 2.13

Développez et réduisez :

A= $(3x - 1) - (2x - 3) =$ ....

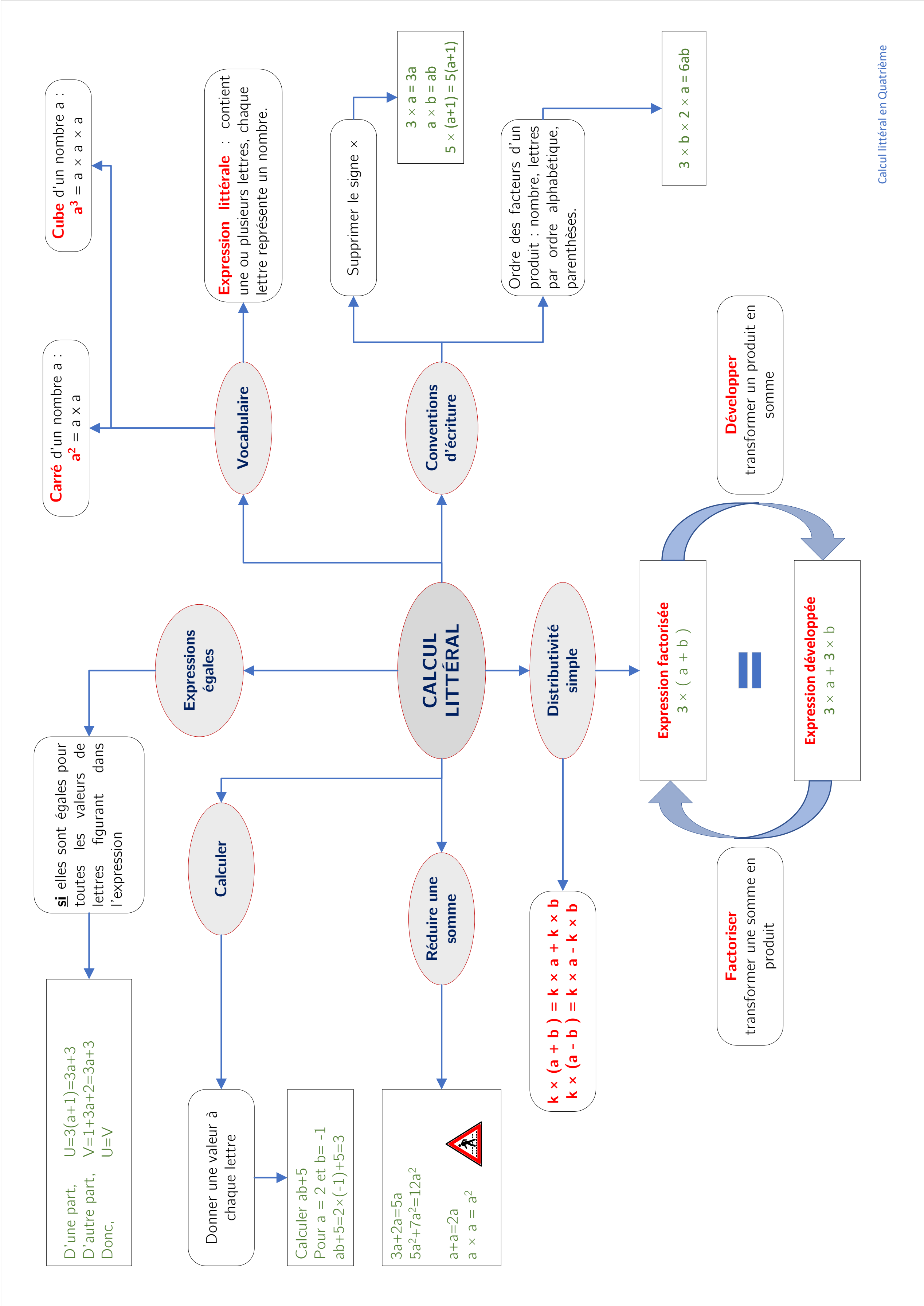
B= $(5 - 2a) - (9 - 4a + x) =$ ....

C= $-(7y + 1) - (-4x) - (5 - y)$ ....

D= $1 - 5x - [x - 7 - (3 - 2x)]$ ....

Remarque

Le schéma récapitulatif page suivante synthétise les principales définitions et propriétés de ce chapitre.


CALCUL LITTÉRAL
Vocabulaire
Carré d'un nombre a : $a^2 = a \times a$
Cube d'un nombre a : $a^3 = a \times a \times a$
Expression littérale : contient une ou plusieurs lettres, chaque lettre représente un nombre.
Conventions d'écriture
Supprimer le signe ×
3 × a = 3a
a × b = ab
5 × (a+1) = 5(a+1)
Ordre des facteurs d'un produit : nombre, lettres par ordre alphabétique, parenthèses.
3 × b × 2 × a = 6ab
Distributivité simple
Expression factorisée
3 × (a + b)
Expression développée
3 × a + 3 × b
Développer
transformer un produit en somme
Factoriser
transformer une somme en produit
k × (a + b) = k × a + k × b
k × (a - b) = k × a - k × b
Réduire une somme
3a+2a=5a
$5a^2+7a^2=12a^2$
a+a=2a
$a \times a = a^2$
Calculer
Donner une valeur à chaque lettre
Calculer ab+5
Pour a = 2 et b= -1
ab+5=2×(-1)+5=3
Expressions égales
si elles sont égales pour toutes les valeurs de lettres figurant dans l'expression
D'une part, U=3(a+1)=3a+3
D'autre part, V=1+3a+2=3a+3
Donc, U=V
Calcul littéral en Quatrième