

1 Définition et construction

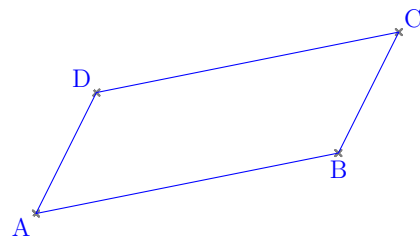
Définition 59 (parallélogramme)

Un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux est un **parallélogramme**.

Exercice 19.1

Dans la figure ci-contre, on a :

$$\begin{cases} (AB) // \dots \\ (AD) // \dots \end{cases}$$

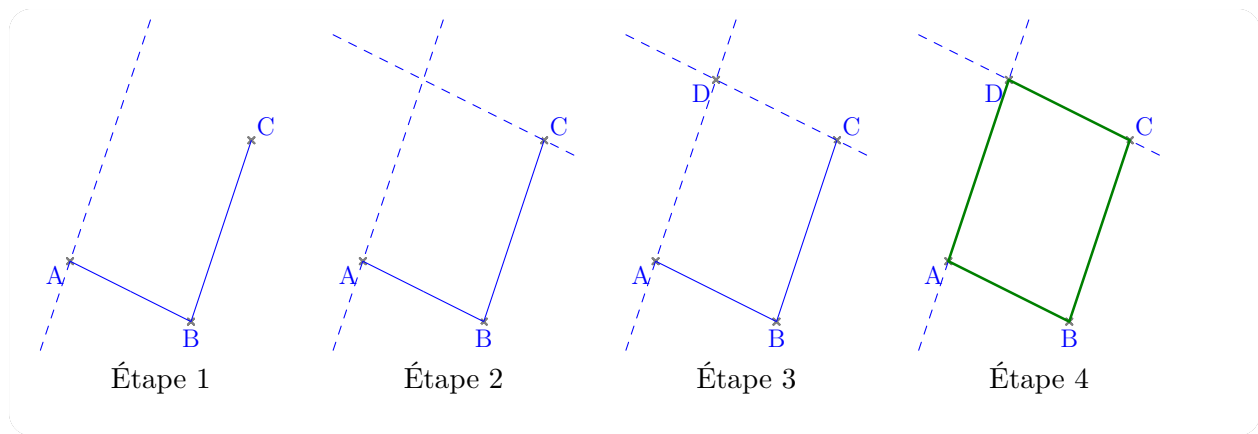


Le quadrilatère $ABCD$ est alors un ...

Méthode (Construire un parallélogramme avec une règle et une équerre)

Soient A , B et C trois points non alignés. Le quadrilatère $ABCD$ est alors un parallélogramme.

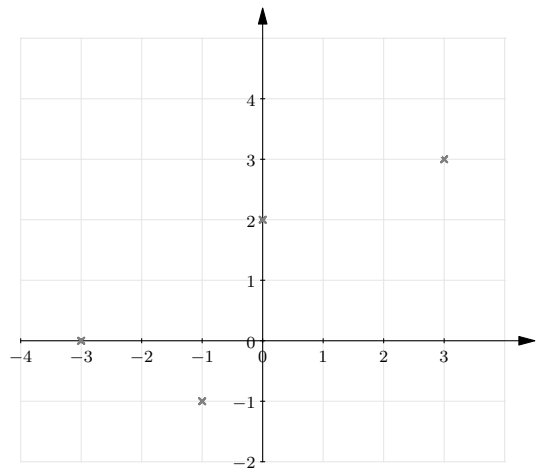
- Étape 1 : Tracer la droite passant par C et perpendiculaire à (AB) .
- Étape 2 : Tracer la droite passant par C et perpendiculaire à (BC) .
- Étape 3 : Placer un point D à l'intersection de ces deux droites.
- Étape 4 : Tracer le parallélogramme $ABCD$.



Exercice 19.2

Dans la figure ci-contre :

1. Placez les points $A(-3;0)$, $B(-1;-1)$, $C(0;2)$ et $E(3;3)$.
2. Placez le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Placez le point F tel que $BCFE$ soit un parallélogramme.
4. Placez le point G tel que $CEGD$ soit un parallélogramme.
5. Donnez les coordonnées des points D , G et F : $D(\dots;\dots)$, $G(\dots;\dots)$ et $F(\dots;\dots)$.



2 propriété des parallélogrammes

Propriété 62 (parallélogramme - diagonales)

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Définition 60 (centre de symétrie)

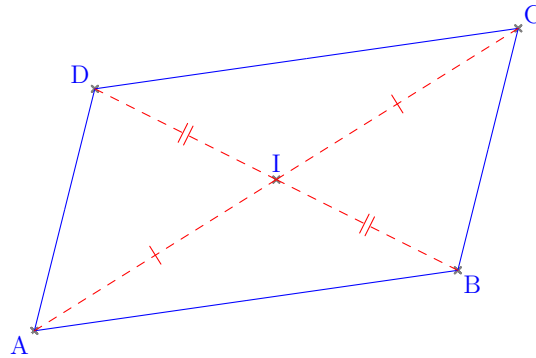
Le milieu des diagonales est le **centre de symétrie** du parallélogramme.

Propriété 63 (parallélogramme - côtés)

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont, deux à deux, de même longueur.

Démonstration

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le point d'intersection de ses diagonales.



Montrons que $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur :

- I est le milieu de $[AC]$ donc C est le symétrique de A par rapport à I .
- I est le milieu de $[BD]$ donc D est le symétrique de B par rapport à I .
- Le segment $[CD]$ est donc l'image de $[AB]$ par la symétrie de centre I .
- Raisonnons à l'aide d'un chaînon déductif :
 - Je sais que : $[CD]$ est donc l'image de $[AB]$ par la symétrie de centre I ;
 - Propriété : la symétrie centrale conserve les longueurs.
 - Conclusion : les segments $[AB]$ et $[AC]$ ont la même longueur.

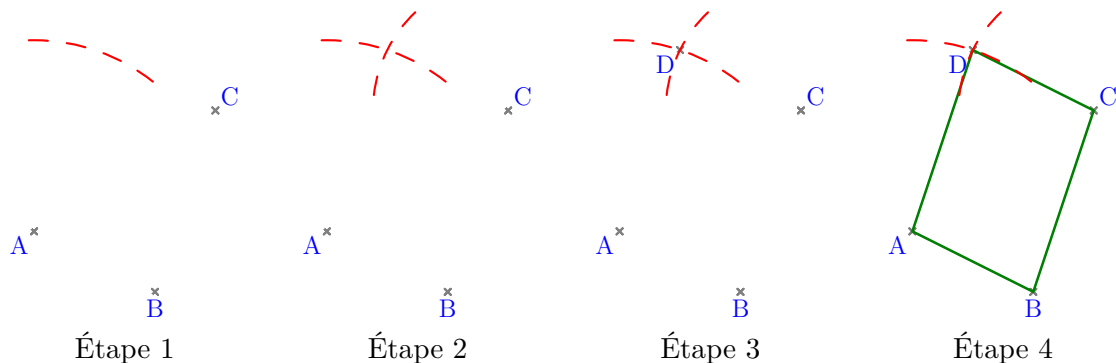
On démontre de la même façon que les côtés $[AD]$ et $[BC]$ ont la même longueur.

En conclusion, les côtés opposés d'un parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur. ■

Méthode (Construire un parallélogramme avec un compas)

Soient A , B et C trois points non alignés.

- Étape 1 : tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC .
- Étape 2 : tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB .
- Étape 3 : tracer un point D à l'intersection des deux arcs de cercle.
- Étape 4 : tracer le parallélogramme $ABCD$.

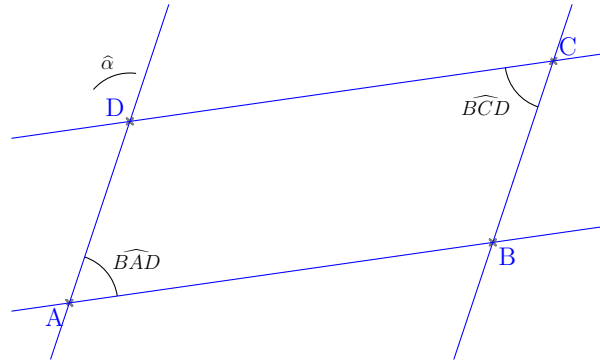


Propriété 64 (parallélogramme - angles opposés)

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

Démonstration

Considérons la figure suivante :



- Première étape : montrons que $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$.

Raisonnons :

- Je sais que :

- * Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- * (AD) est une sécante commune à ces deux droites.
- * $\widehat{BAD}$ et $\hat{\alpha}$ sont alternes-internes.

- Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles alternes-internes de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.

- Conclusion : $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$.

- Seconde étape : montrons que $\hat{\alpha} = \widehat{BCD}$.

Raisonnons :

- Je sais que :

- * Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- * (CD) est une sécante commune à ces deux droites.
- * $\hat{\alpha}$ et $\widehat{BCD}$ sont alternes-internes.

- Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles alternes-internes de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.

- Conclusion : $\hat{\alpha} = \widehat{BCD}$.

- Conclusion générale

Nous avons montré que $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha} = \widehat{BCD}$.

Donc :

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$$

Nous pouvons démontrer de la même façon que $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$.

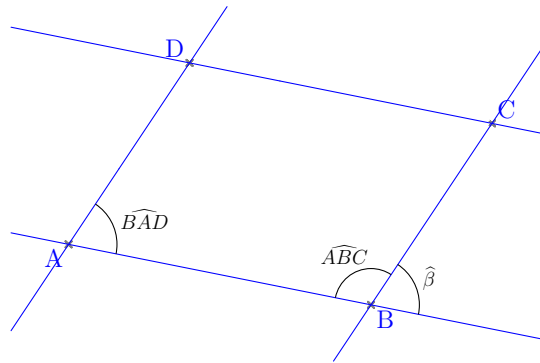
Les angles opposés d'un parallélogramme ont donc la même mesure. ■

Propriété 65 (parallélogramme - mesures des côtés opposés)

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même mesure.

Démonstration

Considérons la figure suivante :



- Première étape : montrons que $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$.

Je sais que :

- Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- (AB) est une sécante commune à ces deux droites.
- $\widehat{BAD}$ et $\hat{\alpha}$ sont correspondants.

Propriété : si deux droites sont parallèles, deux angles correspondants de ces deux droites avec une sécante commune ont la même mesure.

Conclusion : $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$.

- Seconde étape : montrons que $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et β sont adjacents et forment un angle plat. On a donc :

$$\widehat{ABC} + \hat{\beta} = 180^\circ.$$

Comme $\widehat{BAD} = \hat{\alpha}$, nous pouvons en déduire que :

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 180^\circ.$$

Nous avons ainsi démontré que la somme de deux angles consécutifs d'un parallélogramme mesure 180° . ■

3 Reconnaître un parallélogramme

Propriété 66 (reconnaître un parallélogramme (1))

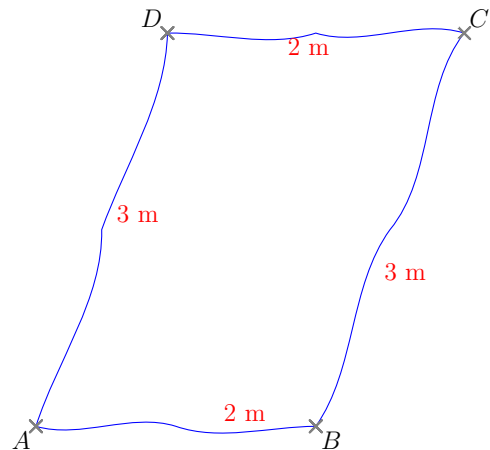
Si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont, deux à deux, de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Exercice 19.3

Les informations données dans la figure ci-contre, tracée à main levée, montrent que $AB = CD$ et $AD = BC$.

Nous pouvons alors déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$ à l'aide d'un chaînon déductif :

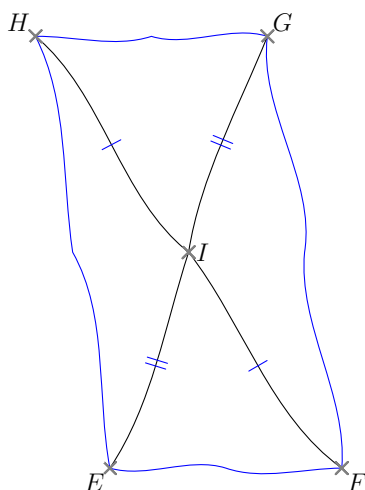
- Je sais que : $AB = CD$ et $AD = BC$.
- Propriété : si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont, deux à deux, de même longueur alors c'est un parallélogramme.
- Conclusion : le quadrilatère $ABCD$ est un ...



Propriété 67 (parallélogramme - diagonales)

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Exercice 19.4



Les informations données dans la figure ci-contre, tracée à main levée, montrent que le point I est le milieu des deux diagonales $[EG]$ et $[FH]$.

Nous pouvons alors déterminer la nature du quadrilatère $EFGH$ à l'aide d'un chaînon déductif :

- Je sais que : les diagonales de $EFGH$ ont même milieu.
- Propriété : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
- Conclusion : le quadrilatère $EFGH$ est un ...

4 Parallélogrammes particuliers

Propriété 68 (parallélogramme - rectangle)

Si un parallélogramme a quatre angles droits alors c'est un rectangle.

Propriété 69 (parallélogramme - losange)

Si un parallélogramme a quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.

Propriété 70 (parallélogramme - carré)

Si un parallélogramme a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur alors c'est un carré.

5 Aire d'un parallélogramme

Définition 61 (hauteur d'un parallélogramme)

Soit un parallélogramme $ABCD$. On appelle **hauteur** relative au côté AB d'un parallélogramme un segment de droite :

- perpendiculaire à $[AB]$;
- dont une extrémité est sur la droite (AB) ;
- dont l'autre extrémité est sur la droite (CD) .

Définition 62

Soit $[MN]$ une hauteur relative à un côté d'un parallélogramme.

Par abus de langage, la longueur MN est également appelée **hauteur**.

Propriété 71

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la longueur d'un de ses côtés choisi comme base par la hauteur relative à ce côté.

$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Exercice 19.5

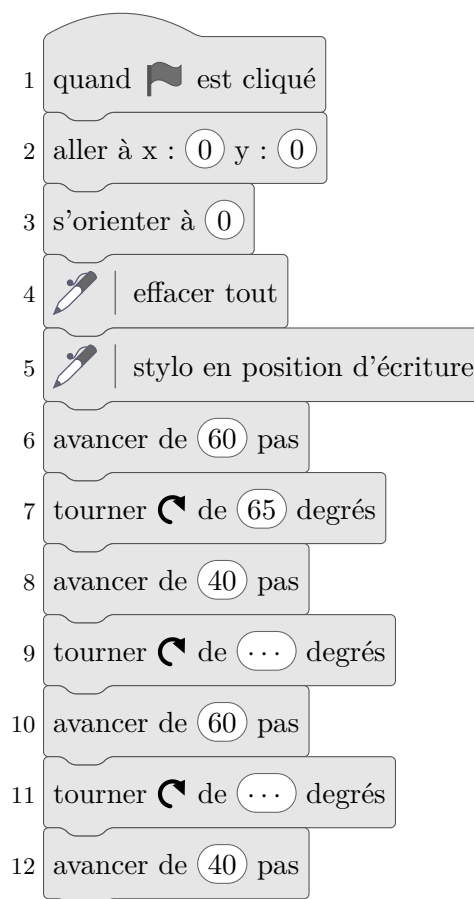
1. Complétez le programme Scratch ci-contre (blocs numéros 9 et 11) afin que le lutin dessine un parallélogramme.
2. Sur votre copie, tracez à main levée le parallélogramme obtenu : codez la figure en indiquant les distances en pas.
3. Calculer le périmètre du parallélogramme.

Réponse

1. Ci-contre.
2. Je trace le parallélogramme à main levée.

3. Je calcule le périmètre du parallélogramme :

...

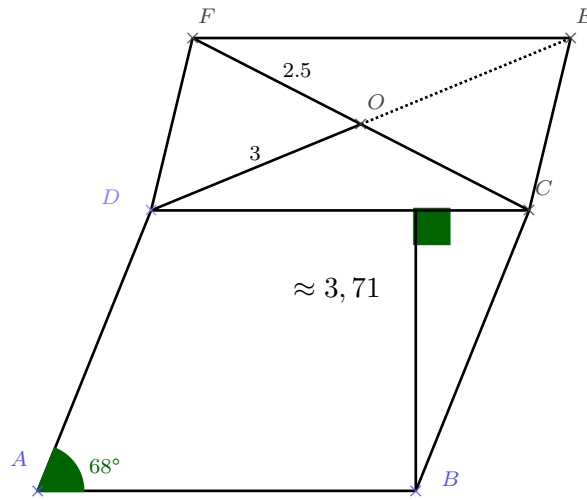


Exercice 19.6

1. Avec la règle et le compas, mais sans équerre, en codant les figures et en indiquant les longueurs et les angles donnés dans l'énoncé :
 - a) Tracez un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 5$ cm, $AD = 4$ cm, et $\widehat{BAD} = 68^\circ$.
 - b) Tracez le parallélogramme $CDFE$ de centre O avec $OD = 3$ cm et $OC = 2,5$ cm.
2. En justifiant à l'aide d'une propriété, déterminez :
 - a) la longueur CD .
 - b) l'angle $\widehat{BCD}$.
 - c) la longueur OE .
3. Calculez l'angle $\widehat{CDA}$.
4. Mesurez approximativement la distance entre les droites AB et CD , puis calculez une valeur approchée de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Réponse

1. Traçons les parallélogrammes demandés :



2. a) Je calcule la longueur CD :

- Je sais que : $ABCD$ est un parallélogramme et ...
- Propriété : dans un parallélogramme, les côtés opposés ont ...
- Conclusion : $CD = AB = \dots$

La longueur CD mesure ...

- b) Je calcule l'angle $\widehat{BCD}$:

- Je sais que : $ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{BAD} = \dots$
- Propriété : dans un parallélogramme, les angles opposés ont ...
- Conclusion : $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \dots$

L'angle $\widehat{BCD}$ mesure ...

- c) Je calcule la longueur OE :

- Je sais que : $CDFE$ est un parallélogramme O est le centre du parallélogramme, DE est une diagonale et $OD = \dots$
- Propriété : dans un parallélogramme, les diagonales ...
- Conclusion : $OE = OD = \dots$

La longueur OE mesure ...

3. Raisonnons :

- Les angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{BCD} = 68^\circ$ sont supplémentaires.
- Propriété : la somme de deux angles supplémentaires est égale à 180°
- Conclusion : $\widehat{CDA} = 180^\circ - \widehat{BCD} = \dots$

L'angle $\widehat{CDA}$ mesure ...

4. La distance entre les droites (AB) et (CD) mesure approximativement 3,71 cm (voir figure ci-dessus).

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$:

$$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{A} \approx 5 \times 3,71 \approx \dots$$

L'aire du parallélogramme $ABCD$ mesure environ $\dots$