

CHAPITRE 6

PROPORTIONNALITÉ

1 Rappels

1.1 Définition

Définition 19 (grandeurs proportionnelles)

Soient deux grandeurs liées de sorte que si l'on multiplie toujours par le même nombre non-nul les valeurs de l'une, on obtient les valeurs de l'autre.

Ces grandeurs sont dites **proportionnelles**.

Définition 20 (tableau de proportionnalité)

On peut représenter les valeurs de deux grandeurs proportionnelle dans un **tableau de proportionnalité** comportant deux lignes.

Chaque ligne correspond à une grandeur.

1.2 Propriété de linéarité multiplicative

Exercice 6.1

Adrian achète 6 kg de pommes de terre et les paie 10,80 €.

Hendrike doit en acheter 30 kg.

- Par quel nombre faut-il multiplier la quantité de pommes de terre achetée par Adrian pour obtenir la quantité achetée par Hendrike ?
- Rassembler les données du problème dans un tableau.
- Sachant que le prix des pommes de terre est proportionnel à leur masse, par combien faut-il multiplier le prix payé par Adrian pour obtenir le prix à payer par Hendrike ?
- Calculer le prix payé par Hendrike.

Réponse

- a. On recherche le nombre qui, multiplié par 6, donnera un produit de 30 selon le schéma suivant :

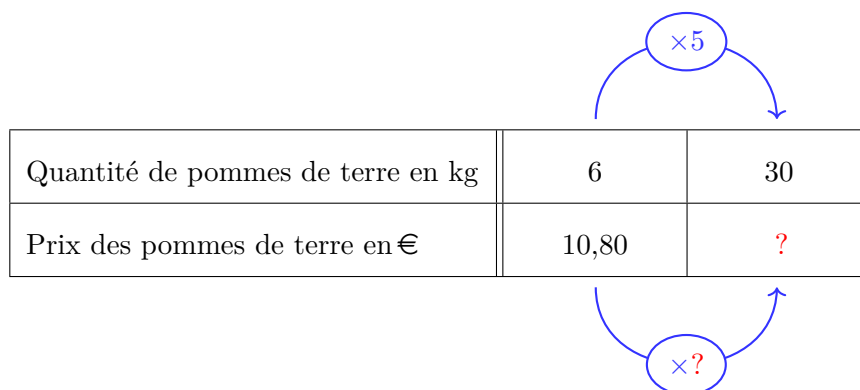
$$6 \times \dots = 30.$$

Ce nombre est le quotient de la division de 30 par 6. On a : $\frac{30}{6} = \dots$

Hendrike achète $\dots$ fois plus de pommes de terre qu'Adrian.

- b. Représentons :

- la 1^{re} grandeur étudiée (masse des pommes de terre en kg) sur la 1^{re} ligne du tableau ;
- la 2^{de} grandeur (prix des pommes de terre en €) sur la 2^{de} ligne du tableau.



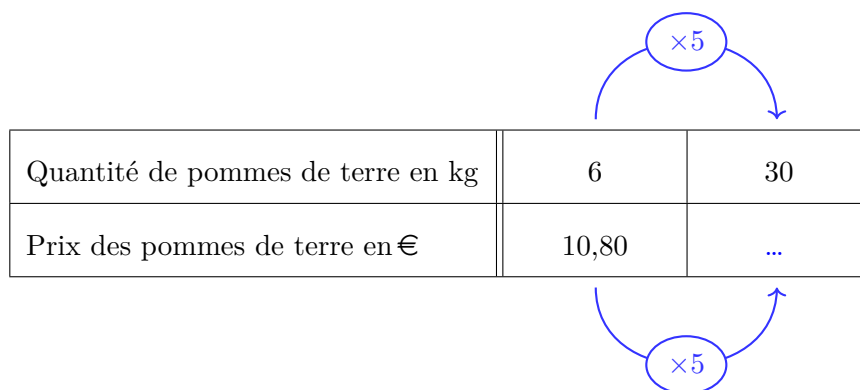
Quantité de pommes de terre en kg	6	30
Prix des pommes de terre en €	10,80	?

- c. La situation est proportionnelle et Hendrike achète 5 fois plus de pommes de terre qu'Adrian. Elle paiera donc 5 fois plus cher.
- d. Je calcule le prix payé par Hendrike.

$$10,80 \times 5 = \dots$$

Hendrike paie donc $\dots$ €.

Nous pouvons maintenant compléter le tableau, en utilisant la propriété de linéarité multiplicative.



Quantité de pommes de terre en kg	6	30
Prix des pommes de terre en €	10,80	...

1.3 Propriété de linéarité additive

Exercice 6.2

Kimia et Longi constituent chacun une chaîne de dominos.

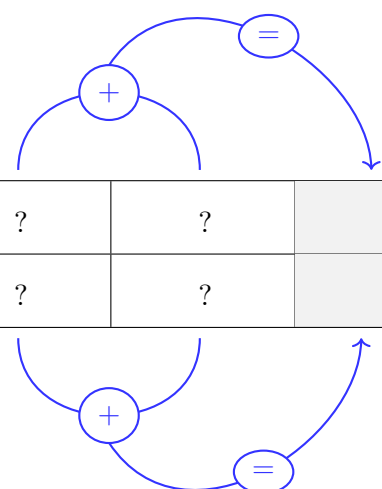
Ils remarquent que la longueur d'une chaîne est proportionnelle au nombre de dominos qui la constitue.

Avec 7 dominos, Kimia a formé une chaîne de 16,1 cm.

Avec 12 dominos, Longi a formé une chaîne de 27,6 cm.

Il mettent bout à bout les deux chaînes et souhaitent connaître le nombre de dominos et la longueur de la nouvelle chaîne ainsi formée.

- Compléter ce tableau, en remplaçant les points d'interrogation à l'aide des données du problème.



Nombre de dominos	?	?	
?	?	?	

Rassembler les données dans le tableau.

- Expliquer comment calculer la longueur totale obtenue avec l'ensemble des dominos.
- Effectuer ce calcul et compléter le tableau.

Réponse

La longueur d'une chaîne est proportionnelle au nombre de dominos qui la compose.

Si on additionne deux chaînes de 12 et 7 dominos, alors :

- Le nombre total de dominos est la somme du nombre de dominos des deux chaînes.

$$12 + 7 = 19.$$

- La longueur totale est la somme des longueurs des deux chaînes.

$$16,1 + 27,6 = 43,7.$$

La nouvelle chaîne mesure 43,7 cm.

On applique ainsi la propriété de linéarité additive.

Nombre de dominos	7	12	19
Longueur totale en cm	16,1	27,6	43,7

The diagram illustrates the proportionality between the number of dominoes and their total length. It features a table with two rows: 'Nombre de dominos' and 'Longueur totale en cm'. The first row contains values 7, 12, and 19. The second row contains values 16,1, 27,6, and 43,7. Above the table, a curved arrow points from the value 7 to a circle containing a plus sign (+), and another curved arrow points from this circle to a circle containing an equals sign (=). A third curved arrow points from this equals sign circle to the value 19. Below the table, a similar sequence of arrows shows 16,1 leading to a plus sign circle, which leads to an equals sign circle, which then points to 43,7. This visualizes the process of finding the total length for 19 dominoes by first finding the length for 12 dominoes and then adding the length for 7 more dominoes.

1.4 Retour à l'unité

Exercice 6.3

Sur un site de musique en ligne, toutes les chansons sont au même prix.
Romane achète 7 chansons pour 10,22€.

- Combien coûte 1 chanson ?
- Combien coûtent 12 chansons ?
- Représentez la situation dans un tableau.

Réponse

- Je vais calculer le prix d'une unité (une chanson). Ensuite je vais multiplier ce prix par 12 pour calculer le prix de 12 unités, en utilisant ainsi la méthode du **retour à l'unité**.

Une chanson coûte 7 fois moins que 7 chansons.

Je calcule son prix.

$$\frac{10,22}{7} = 1,46.$$

Une chanson coûte 1,46€.

- Je calcule le prix de 12 chansons.

Elles coûtent 12 fois plus cher qu'une chanson.

$$12 \times 1,46 = 17,52.$$

Douze chansons coûtent 17,52€.

- Voici le tableau représentant cette situation de proportionnalité.

Nombre de chansons	1	7	12
Prix des chansons (en €)	1,46	10,22	17,52

2 Reconnaître une situation de proportionnalité

Remarque

Deux grandeurs liées ne sont pas toujours proportionnelles.

En particulier, le fait que l'on présente dans un tableau les valeurs de ces deux grandeurs n'en garantit pas la proportionnalité.

Exercice 6.4

Zian a noté dans un tableau les prix pour différentes quantités de croix de Savoie (ce sont des viennoiseries) chez la boulangère.

Nombre de croix de Savoie	1	4	9
Prix (en €)	1,30	5	11

Le prix à payer est-il proportionnel au nombre de croix de Savoie achetées ?

Réponse

Si le prix à payer est proportionnel aux nombre de viennoiseries achetées, quatre croix de Savoie doivent coûter quatre fois plus cher qu'une seule.

$$4 \times 1,30 = 5,20.$$

Les 4 viennoiseries devraient coûter 5,20€.

D'après le tableau, quatre croix de Savoie ne coûtent pas 5,20€ mais 5€.

Le prix des croix de Savoie n'est donc pas proportionnel au nombre acheté.

Exercice 6.5

La taille d'une personne est-elle proportionnelle à son âge ?

Réponse

Les grandeurs étudiées sont :

- la taille d'une personne ;
- son âge.

Ces grandeurs sont-elles liées ?

Oui, si l'on considère que la taille d'une personne évolue avec le temps.

Ces grandeurs sont-elles proportionnelles ?

Réfléchissons :

- Si la taille d'une personne est proportionnelle à son âge, à 10 ans cette taille devrait être 10 fois plus grande qu'à un an.
- Prenons un enfant qui, à l'âge d'un an, mesure 75 cm.
- Je calcule sa taille à 10 ans, qui devrait donc être 10 fois plus grande.
 $10 \times 75 = 750$.
- L'enfant devrait donc mesurer 750 cm soit 7,5 m, ce qui nous semble impossible.

En conclusion, la taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge.

3 Coefficient de proportionnalité

Propriété 29 (coefficient de proportionnalité)

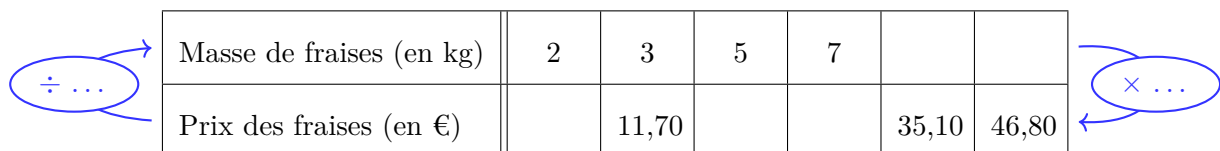
On considère deux grandeurs proportionnelles.

Le nombre par lequel on multiplie une grandeur pour obtenir la seconde s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Dans un **tableau de proportionnalité**, chaque nombre de la seconde ligne est obtenu en multipliant chaque nombre de la première ligne par un même nombre : le **coefficient de proportionnalité**.

Exercice 6.6

Sachant que le prix des fraises est proportionnel à la quantité vendue, on veut compléter le tableau suivant.



The diagram shows a blue oval with a division symbol and three dots (÷ ...) on the left, with arrows pointing to the first two rows of the table. Another blue oval with a multiplication symbol and three dots (× ...) is on the right, with arrows pointing to the same two rows.

Masse de fraises (en kg)	2	3	5	7		
Prix des fraises (en €)		11,70			35,10	46,80

- Calculer le coefficient de proportionnalité.
- Calculer le prix de 2 kg, 5 kg et 7 kg de fraises.
- Calculer les quantités de fraises vendues au prix de 35,10 € et 46,80 €.

Réponse

- La troisième colonne du tableau est complète.
 Elle nous indique que 3 kg de fraises coûtent 11,70 €.
 Je peux ainsi calculer le coefficient de proportionnalité c .

$$c = \frac{11,70}{3} = 3,90.$$

b. Connaissant la quantité de fraises, en la multipliant par le coefficient j'obtiens son prix de vente.

– Pour 2 kg : $2 \times 3,90 = \dots$

Donc 2 kg de fraises coûtent $\dots$

– Pour 5 kg : $5 \times 3,90 = \dots$

Donc 5 kg de fraises coûtent $\dots$

– Pour 7 kg : $7 \times 3,90 = \dots$

c. Connaissant le prix de vente, je détermine la quantité correspondante de fraises, en la divisant par le coefficient de proportionnalité.

– Je calcule la quantité de fraises pour un prix de 35,10 €,

$$\frac{35,10}{3,90} = \dots$$

Donc, pour 35,10 € de fraises on obtient une quantité de $\dots$

– Je calcule la quantité de fraise pour un prix 46,80 €,

$$\frac{46,80}{3,90} = \dots$$

Donc, pour 46,80 € de fraises on obtient une quantité de $\dots$

d. Je complète le tableau de proportionnalité.

$\div \dots$	Masse de fraises (en kg)	2	3	5	7		
	Prix des fraises (en €)		11,70			35,10	46,80

Exercice 6.7

Pour 6 objets identiques on paie 28,80 €. Combien coûteraient 15 objets ?

Réponse

Dans ce genre d'énoncé, le terme "identique" nous indique que le prix des objets est proportionnel à la quantité achetée.

Connaissant le prix de 6 objets, je peux calculer le coefficient de proportionnalité.

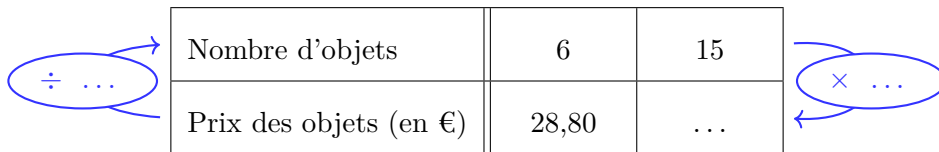
$$c = \frac{28,80}{6} = \dots$$

Je peux maintenant calculer le prix de 15 objets.

$$15 \times \dots = 72.$$

Le prix de 15 objets est $\dots$

Nous pouvons représenter la situation par un tableau de proportionnalité :



Nombre d'objets	6	15
Prix des objets (en €)	28,80	...

Exercice 6.8

Dans une cantine scolaire, un pâtissier dispose d'une recette qui indique que pour réaliser un gâteau pour 15 personnes, il faut 8 œufs.

Le pâtissier doit faire un gâteau pour 26 élèves. Combien d'œufs doit-il utiliser ?

Réponse

Le nombre d'œufs est proportionnel aux nombre d'élèves.

Je calcule le coefficient de proportionnalité.

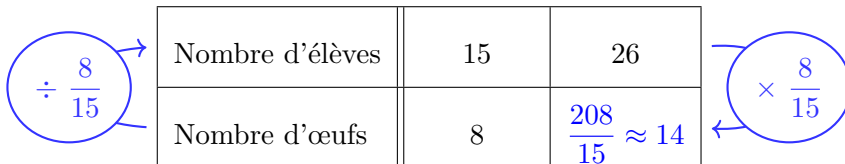
$$c = \frac{8}{15}.$$

Je calcule le nombre d'œufs nécessaire pour 26 élèves, en arrondissant la valeur obtenue à l'entier supérieur si nécessaire.

$$26 \times \frac{8}{15} = \frac{26 \times 8}{15} = \frac{208}{15} \approx 13,87 \approx 14.$$

Le cuisinier doit prendre 14 œufs pour sa recette.

Réalisons un tableau de proportionnalité.



Nombre d'élèves	15	26
Nombre d'œufs	8	$\frac{208}{15} \approx 14$